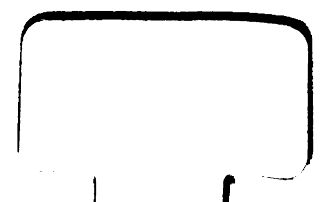


Rationelle Konstruktion und Wirkungsweise

des

Druckluft-Wasserhebers für Tiefbrunnen.

Von

Alexander Perényi,

Oberingenieur der K. Ungar. Staatsbahnen.

Rationelle Konstruktion und Wirkungsweise

des

Druckluft-Wasserhebers

für

Tiefbrunnen.

Von

Alexander Perényi,

Oberingenieur der königl. ung. Staatsbahnen.

Mit 14 Abbildungen im Texte.

Wiesbaden.

C. W. Kreidel's Verlag

1908.



Buchdruckerei von Carl Ritter, G. m. b. H., Wiesbaden.

Inhaltsverzeichnis.

I. Einleitung.

Wenn aus Bohrbrunnen von einem nur mit beschränkt tiefem Schachte erreichbaren Niveau die erforderliche Wassermenge infolge ungenügender Zuströmung mittels Dampfpumpe nicht gehoben werden kann, so ist es üblich dieselbe mittels Tiefpumpe oder mittels verdichteter Luft zu heben. In neuester Zeit haben nun gegenüber den Tiefpumpen die Drucklufttheber verbreitete Anwendung gefunden. Die technische Literatur hat sich bisher mit der Wirkungsweise und der erforderlichen rationellen Dimensionierung dieser Wasserheber in ungenügendem Maſse befasst. Was hiervon bis heute veröffentlicht wurde beschränkt sich grösstenteils auf Beschreibungen ausgeführter Formen und Anlagen.[1]) Auch sind vergleichende Versuche mit verschiedenförmigen Druckluftwasserhebern gemacht worden[2]); jedoch sind die Versuchsdaten ohne Beachtung der Ergiebigkeit des benutzten Brunnens oder Notierungen der verschiedenen durch Pumpen abgesenkten Wasserstände gegeben. Mangels solcher Daten aber können wir, wie sich dies später zeigen wird. aus den übrigen Beobachtungsdaten keine allgemeingültigen Folgerungen ziehen, Während vieljährigen Erfahrungen an im Betriebe befindlichen gelungenen und nicht genügend gelungenen derartigen Anlagen hat Verfasser die Überzeugung gewonnen, dass man ohne rationelle theoretische Mittel den Einfluss einer Menge von Faktoren nicht übersehen kann. So kann man aus den veröffentlichten Erfahrungsresultaten nicht einmal darüber eine Regel aufstellen, welchen Einfluss die Weite des Wasserheberohres, die Eintauchtiefe des Luftleitungsrohres und die eingeblasene Luftmenge auf die hebbare Wassermenge haben können. Es wird sich zeigen, dass der Verbrauch der Luftmenge, die hebbare Wassermenge die Spannung im Luftbehälter und die Eintauchtiefe des Luftrohres, aber auch der effektive Wasserstand miteinander in solchem abhängigen Verhältnisse stehen, welches bei jedem Brunnen ein anderes ist, und behufs dessen es zweckmäſsig war, die charakteristische Konstante der Ergiebigkeit des Brunnens in die Rechnung einzuführen. Auch war es nötig, dass wir die Ursache der in der Praxis zu zweifelhaften Erklärungen Anlass gebenden Erscheinungen mit theoretischen Mitteln ergründen. Solche Erscheinungen sind: dass die Abkühlung des Luftrezipienten den Gang der Luftpumpe erleichtert; ferner oft der Ausfluss des gehobenen Wassers intermittierend geschieht, wenn auch die Lufteinströmung in den Brunnen kontinuierlich stattfindet. Wir werden sehen, dass die Intermittenz desto bedeutender ausfällt je weiter das Steigrohr im Verhältnis zur Brunnenergiebigkeit und zur

---

[1]) G. Hiscox: Compressed air. London 1900. — Hartmann u. Knocke: Die Pumpen. Berlin 1901. — An ingenieus air lift pump: Engineering News 1904. No. 21. — Cowan: Emergency Air Lift: Eng. News 1906, No. 24.

[2]) Interessante kritische Betrachtungen und Mitteilungen von Versuchsergebnissen befinden sich im Engineering News, Jahrg. 1893, 8. Juny, unter Titel: The Air Lift Pump. Dann in der Zeitschr. d. Vereins Deutsch. Ing., Jahrg. 1898, No. 36 von Prof. Josse.



Eintauchtiefe des Luftrohres ist. Josse scheint während seiner Versuche dies, wenn auch in minderem Maſse beobachtet zu haben, indem er sagt: dass in seinen 7—8 cm weiten Steigrohren die Luft in kleine Blasen verteilt wohl frei aufgestiegen ist; jedoch wurden dieselben zeitweise durch grössere Luftblasen durchbrochen, welche die ganze Weite des Steigrohres erfüllten, und nachher schien es so, als wenn das Wasser im Steigrohr zurückgefallen wäre. Die Ursache dieser Erscheinung verblieb also zu ergründen.

Die Geschichte der Entwickelung des Druckluftwasserhebers und dessen praktischen Anwendung ist interessant, weil sie zeigt, dass wenn die theoretische Forschung nicht der praktischen Ausführung gleichsam den Weg beleuchtet, im Dunkeln teuere fehlerhafte Anlagen entstehen, bis nicht durch Zufall die ähnliche Einrichtung unter anderen Umständen oder auf anderem Platz angewendet besser entspricht. Versuche sind auch nur dann lehrreich, wenn die Abhängigkeit der verschiedenen Daten derselben voneinander gründlich übersichtlich ist. Je zahlreicher aber die unabhängig veränderlichen Grössen sind, welche auf eine andere abhängige Grösse einwirken, desto schwieriger wird die Übersicht, aus Versuchen Folgerungen auf die Ursache der Verschiedenheit der Ergebnisse zu ziehen. Die Geschichte der Entwickelung des Luftdruckwasserhebers beweist dies am besten. Die Praxis ging wie immer hier auch voran, jedoch beleuchtete keine Theorie ihre Ausführung und man tappte nur im Dunkel weiter bis man auf ein richtiges Feld ankam, ohne dass die Welt weiss, ob man es nicht noch besser machen könnte.

Nach Dinglers Polytechnischem Journal (Bd. 256, S. 284) soll Werner Siemens bereits um die Mitte des vergangenen Jahrhunderts verdichtete Luft zum Entwässern eines Minenschachtes in der Umgebung von Berlin benutzt haben. In Amerika nahm Frizell im Jahre 1880 ein Patent auf eine Methode, mittels verdichteter Luft Wasser zu heben. Unabhängig von diesen wendete die ähnliche Methode Professor Elmo G. Harris bei Gelegenheit, als die Pfeiler der Brücke über den Fluss Arkansas gebaut werden mussten, zum Baggern an. Das Steigrohr, dessen Länge 20 Fuss engl. und dessen Durchmesser 3 Zoll betrug, wurde 16 Fuss tief teils ins Wasser, teils in den Sandboden so gesteckt, dass nur 4 Fuss Länge über Wasser ragten. Auch im Jahre 1870 patentierte B. Eeds einen „Hydraulischen Sandheber"; so auch Stone einen zu ähnlichem Zweck dienenden „Excavator" (siehe Verhandl. des Ver. zur Förd. d. Gewerbfleisses, Jahrg. 1885, März, S. 80, 82). Als eigentlicher Erfinder, der den Druckluftwasserheber zum praktisch brauchbaren Mittel machte, ist Dr. Julius G. Pohlé, Chemiker und Bergingenieur in New-York zu betrachten. Im Jahre 1886 liess er eine alternierend wirkende Druckluftpumpe patentieren, in deren Kammern Druckluft abwechselnd wirkte. In seinem zweiten Patent im Jahre 1886 schlug er vor, dünne Luftstrahlen aus verschiedenen Punkten in dichter Nähe voneinander unter Wasser ins Steigrohr zu blasen, welche in Blasen verteilt das Wasser heben sollten. Im Jahre 1892 (6. Dez.) nahm Dr. Pohlé sein drittes Patent auf einen Drucklufthebér, in welchem das Wasser in abwechselnden Schichten durch die Luft gehoben wird, in dem die Luftblasen die ganze Weite des Steigrohres einnehmen. Die theoretische Untersuchung der beiden letzteren Arten ist der Gegenstand vorliegenden Werkes.

Wir beginnen nun mit der Untersuchung des folgenden elementaren Versuches, womit wir zuvörderst den Begriff des Niveaudruckes und der Auftriebskraft erklären wollen.

II. Niveaudruck und Auftrieb.

Drücken wir in ein zylindrisches bis zur Höhe H_a mit Wasser gefülltes Gefäss (Abb. 1), dessen innere wagrechte Querschnittsfläche F_1 gross ist eine dünne, gewichtslos gedachte, mit Luft vom Rauminhalt V und spezifischem Gewichte γ gefüllte Blase hinab, und halten dieselbe mittels der Kraft P in Ruhe: so wird

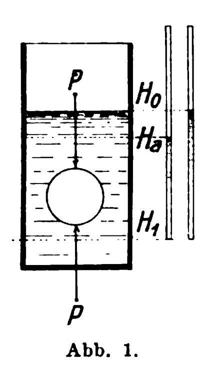


Abb. 1.

Niveaudruckvermehrung bei ruhender Luftblase.

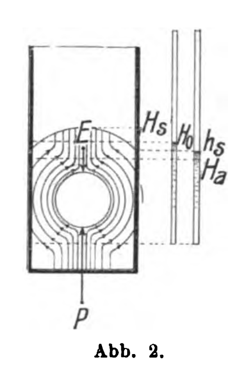


Abb. 2.

Niveaudruckvermehrung während dem Aufstieg der Luftblase.

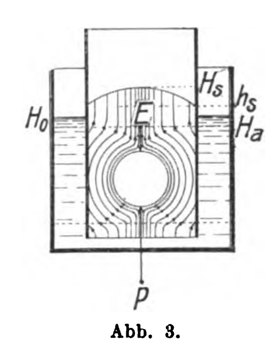


Abb. 3.

Niveaudruckänderung ausserhalb des Steigrohres während dem Aufstieg der Luftblase.

Wasser vom Rauminhalt V und vom spezifischen Gewicht ϱ_1 von seinem Platze verdrängt werden, weshalb der Wasserspiegel von Höhe H_a auf H_o emporsteigen wird. Infolgedessen wird:

1) . . . . $V = F_1\,(H_o—H_a)$ sein. Bezeichnen wir den auf irgend ein unter der Blase befindliches H_1 hohes Niveau wirksamen Druck auf die Flächeneinheit der darüber befindlichen Wassersäule mit p', ferner ähnlichen auf den Wasserspiegel wirksamen Atmosphärendruck mit $p'_o = 10334$ kg : m²: so war der aufs Niveau H_1 wirksame spezifische Druck, bevor die Blase eingetaucht wurde, auf die Flächeneinheit:

$p' = p'_o + (H_a—H_1)\,\varrho_1$, wohingegen nach dem Eintauchen der Blase zu diesem Druck noch das Gewicht der Blase, welches nach Gl. 1 $\frac{V\gamma}{F_1} = (H_o—H_1)\gamma$ ist, — und die das Bläschen in Ruhe haltende spezifische Kraft $\frac{P}{F_1}$ hinzukommen. Demnach wird der spezifische Druck auf den Gefässboden sein:

$p' = p_o' + (H_a—H_1)\varrho_1 + (H_o—H_a)\gamma + \frac{P}{F_1}$. Hieraus erhalten wir den Niveaudruck in Wassersäulenhöhe h' gemessen, welche das Piesometer zeigt, wenn das Wasser im Gefäss ruhend ist:

2) . $h' = \frac{p'—p'_o}{\varrho} = \left(1—\frac{\gamma}{\varrho_1}\right) H_a + \frac{\gamma}{\varrho_1} H_o + \frac{P}{F_1\,\varrho_1} — H_1$. Nun ist aber das spezifische Gewicht der Luft gegen das des Wassers verschwindend klein. Denn ein m³ Wasser wiegt bei 15° C. Temperatur 1000 kg, währenddem bei derselben Temperatur 1 m³ mit Wasserdunst gesättigte atmosphärische Luft unter

1 bis 7 Atm. Druck nur 1,2 kg bis 8,6 kg wiegt. Somit können wir annähernd für praktische Rechnungen genügend genau die Differenz zwischen den spezifischen Gewichten von Luft und Wasser im Mittel folgendermafsen konstant setzen:

3) . . . . $\varrho_l - \gamma \cong \varrho = 996$ und können sogar das spezifische Gewicht der Luft neben dem des Wassers als sehr klein vernachlässigen, oder überall statt ϱ_l den Wert ϱ in Rechnung ziehen.

Hiermit folgt aus Gl. 2) die folgende Näherungsgleichung:

4) . . . . . $$h' = \frac{p' - p'_o}{\varrho} \cong H_a - H_l + \frac{P}{F_l \varrho}.$$

Weil aber die Kraft P dazu erforderlich ist, um die eingetauchte Luftblase in Ruhe zu erhalten, und weil vor dem Eintauchen das Piesometer die Höhe:

$$h'' = \frac{p' - p'_o}{\varrho} = H_a - H_l$$ zeigte, so folgt, dass die Differenz $h' - h''$ nichts anderes ist, als das Mafs der Niveaudruckdifferenz, welche aus der Auftriebskraft der Luftblase entstanden ist, und welche sich im Heben des Wasserstandes von der Höhe H_a auf H_o sich äussert. Der dadurch eingenommene Raum ist demnach nach Gl. 1 dem Rauminhalt der Blase gleich. Somit ist:

$$h' - h'' = H_o - H_a = \frac{P}{F_l \varrho} \cong \frac{V}{F_l},$$ und der Bodendruck vermehrt sich um:

5) . . . . $$P \cong V\varrho = F_l (H_o - H_a)\varrho.$$

Die Kraft des Auftriebes P einer Luftblase im Wasser ist daher beinahe unabhängig von der Dichtigkeit der Luft und deren inneren Druck, jedoch veränderlich mit Änderung ihres Rauminhaltes in verschiedenem Niveau. Wenn hingegen anstatt der anhaltenden Kraft P auf die eingetauchte Blase eine nach abwärts gerichtete widerstehende Kraft E wirkt (Abb. 2), welche kleiner ist, als die erstere: so wird die Blase mit Beschleunigung k nach aufwärts sich bewegen, und das Piesometer wird eine niedrigere Drucksäule h_s zeigen, als früher. Wir erhalten diese Drucksäule, wenn wir in Gl. 4 statt der anhaltenden Kraft P die geringere Kraft E einsetzen.

Also ist dann nach Gl. 4:

6) . $$\frac{p' - p_o'}{\varrho} = h_s = H_a - H_l + \frac{E}{F_l \varrho} = H_o - H_l - \frac{P - E}{F_l \varrho}$$

weil eben nach Gl. 5

6a) . . . . $$H_o = H_a + \frac{P}{F_l \varrho}$$ ist.

Wenn wir nun in ein mit Wasser teilweise gefülltes Gefäss, dessen wagrechte Querschnittsfläche F_1 misst (Abb. 3) ein Rohr einsenken, dessen innere Weite F misst; und wenn wir in letztere eine Luftblase tauchen, deren wagrechte Querschnittsfläche f gross ist: so wird beim Festhalten derselben der ursprüngliche Wasserstand H_a auf die Höhe H_o sowohl im Gefäss als auch im Rohr steigen. Zählen wir die Niveauhöhen von irgend einem unteren Niveau, und lassen die Blase frei aufsteigen, so wird der Wasserstand im Gefässe ausserhalb des Rohres bis h_s hinabsinken, und im Rohre zur Höhe H_s nach Mafs der Geschwindigkeit, mit welcher die Blase emporsteigt, sich erheben. Vernachlässigen wir die Grösse der ringförmigen wagrechten Querschnittsfläche der dünnen Rohrwand gegen die

grossen Weiten des Rohres und des Gefässes in der Rechnung als unbedeutend klein: so ist offenbar, weil die in Bewegung befindliche Luftblase teils die ihrem Rauminhalt entsprechende Menge Wasser verdrängt, welche nach Gl. 5 ist:

7 a) . . . . $F_1 (H_0 - H_a) = V = \frac{P}{\varrho}$

teils aber auch eine bestimmte Wassermenge q mit sich nach aufwärts in Bewegung versetzt und hierdurch ein Sinken des Wasserstandes ausserhalb des Steigrohres im Gefässe verursacht, welche Wassermenge ist:

7 b) $(F_1 - F)(H_0 - h_s) = (F_1 - F)\{(H_0 - H_a) - (h_s - H_a)\} = q$, so wird die im Steigrohr entstehende räumliche Vermehrung der Luft- und Wassermengen werden:

7 c) . . . . . $F(H_s - H_a) = q + F(H_0 - H_a)$.

Nun ist nach Gl. 6

8 a) . . . . $h_s - H_a = \frac{E}{F_1 \varrho}$ und nach Gl. 7 a

8 b) . . . . $H_0 - H_a = \frac{P}{F_1 \varrho}$, welch letztere zwei Werte in Gl. 7 b eingesetzt ergeben:

9) . . . . $q = \frac{F_1 - F}{F_1 \varrho}(P - E)$; somit erhalten wir aus Gl. 7 c mit Gl. 7 a die Steigung des Wasserstandes im Steigrohr als Funktion des Auftriebes, Bewegungswiderstandes und der Rohrweiten, nämlich:

10) . . . . $H_s - H_a = \frac{1}{F\varrho}\left[P - \left(1 - \frac{F}{F_1}\right)E\right]$.

Und ziehen wir den Wert von $h_s - H_a$ nach Gl. 8 a aus beiden Seiten der Gl. 10 ab, so erhalten wir die Steigung des Wasserstandes im Steigrohr über den gestauten Wasserspiegel im äussern Gefässraum, nämlich:

11) . . . . $H_s - h_s = \frac{P - E}{F\varrho}$. Die beiden Gleichungen 10 und 11 gelten für eine kompakte im Wasser frei emporsteigende Luftblase, deren Volumen V, deren Auftrieb P ist, und gegen welche das Wasser den Widerstand E entgegensetzt.

Aus Gl. 10 ist ersichtlich, nach welchem Gesetze der Wasserstand im Steigrohr sich mit der Brunnenweite (F_1) ändert. Bildet bei artesischen Brunnen das Brunnenrohr selbst das Steigrohr, so ist dann, weil $F_1 = F$:

12) . . . . . $\underset{F_1 = F}{\Big|} H_s - H_a \Big| = \frac{P}{F\varrho}$ also unabhängig vom Widerstand.

Ist aber $F_1 = \infty$, welcher Fall eintritt, wenn das Steigrohr in einen Teich oder Fluss gesteckt wird, so ist dann:

13) . . . . . . $\underset{F_1 = \infty}{\Big|} H_s - H_a \Big| = \frac{P - E}{F\varrho}$, also kleiner als im frühern Fall; wohingegen die relative Steighöhe nach Gl. 11 in allen Fällen unabhängig von der Brunnenweite bleibt.



III. Erhebung des Wasserspiegels bei kontinuierlicher Lufteinströmung.

Wir haben bisher die Formeln für die Erhebung des Wasserspiegels in Gefäss und Steigrohr entwickelt, indem wir nur eine einzige Luftblase, welche irgend welcher Weise unter Wasser gebracht, frei gelassen wurde, ins Auge fassten. Wir ändern nun die Formeln für den kontinuierlichen Luftstrom, wenn nämlich in jeder Sekunde durch ein beliebig hohes Niveau H im Steigrohr die Luftmenge vom Rauminhalt V hindurchgeht. Ist in diesem Fall t_s die Zeit in Sekunden, unter welcher jedes unmessbar kleine Luftteilchen Vdt vom Mündungsniveau des Luftleitungsrohres bis zur höchsten Steighöhe H_s emporschwebt: so folgt, dass der gesamte Rauminhalt der im Wasser schwebenden Luft, welchen wir mit W bezeichnen:

14 a) . . . . $W = \int_0^{t_s} V dt$, dann ist der Auftrieb nach Gl. 5

14 b) . . . . $\int_0^{t_s} P dt = W\varrho$.

Und ebenso wird der Gesamtwiderstand aller Luftblasen, die im Wasser schweben — wenn wir denselben gleichwertig mit dem Gewichte einer Wassermasse setzen, deren Raummenge J ist —

15) . . . . $\int_0^{t_s} E dt = J\varrho$. Somit wird die effektive Steigung des Wasserstandes im Steigrohr nach Gl. 10, 14 b und 15 sein:

16) . . . . . $H_s - H_a = \frac{W}{F} - \left(1 - \frac{F}{F_1}\right)\frac{J}{F}$.

Ferner die Steigung des Wasserstandes infolge Rückstauung in der ganzen Weite des Brunnenrohres nach Gl. 8 a:

17) . . . . $h_s - H_a = \frac{J}{F_1}$. Und die relative Steigung über dem aufgestauten Wasserspiegel nach Gl. 11:

18) . . . . $H_s - h_s = \frac{W - J}{F}$.

Aus Gl. 16 ist ersichtlich, dass die effektive Steigung des Wasserstandes im Steigrohr am grössten wird, wenn $F_1 = F$, das heisst wenn das Brunnenrohr selbst als Steigrohr dient. Dann wird einfach Maximum $H_s - H_a = \frac{W}{F}$. Ferner ist ersichtlich, dass die Steigung des Wasserstandes im Steigrohr am kleinsten wird, wenn $F_1 = \infty$, also wenn das Steigrohr im Fluss oder Teich steckt. In diesem Fall wird nach Gl. 16 Minimum $H_s - H_a = \frac{W - J}{F}$. Auch wird im letzteren Fall nach Gl. 17 $h_s = H_a$, das heisst der Druck auf die Mündung des Luftrohres wird dabei nicht vermehrt. Hingegen wird im ersteren Fall nach Gl. 17 der Rückdruck seinen maximalen Wert max $h_s = H_a + \frac{J}{F}$ erreichen. Dieser Rückdruck ist in Gl. 17 in gleichwertiger Wassersäule bestimmt und bewirkt, dass der Zufluss

aus der Quelle des Brunnens sich vermindert; denn der Zufluss nimmt umso mehr im Brunnen ab, je höher der Wasserstand über die Quelle reicht. Die Wirkung ist dieselbe, wenn statt der Wassersäule auf die Quelle, wie im erwähnten ersten Spezialfall, eine anderartige reagierende Kraft wirkt. Und im allgemeinen kommt bei bestimmtem Wasserstande durch Einblasen von Luft ein umso grösserer Rückdruck, welcher vom Widerstande des Wassers gegen die emporsteigende Luft herrührt, zum Druck der erwähnten Wassersäule hinzu, je enger der Brunnen ist.

Folglich erfordert das Einblasen von Luft ins Brunnenwasser um so stärkere Verdichtung der Luft, je enger der äussere Raum ums Steigrohr ist und um so geringer wird die Ergiebigkeit des Brunnens, übrigens gleiche andre Verhältnisse vorausgesetzt.

Die Förderhöhe Gl. 18 ist abhängig von der im Wasser schwebenden Luftmenge W und von der Raummenge J. Letztere ist wieder nach Gl. 15 vom Widerstande E des Wassers gegen die in der Sekunde durch ein Niveau durchströmende Luftmenge V abhängig. Demnach stellt sich die Aufgabe, den Widerstand E und die Luftmenge V als Funktionen der Gewichtsmenge, des inneren Druckes und der Geschwindigkeit der einströmenden Luft zu bestimmen.

IV. Bewegungswiderstand und mitgetriebene Wassermenge.

Der Wasserstand E verursacht die Verzögerung der im Wasser beweglichen Luft, weil dieselbe behufs Zerteilung und Verschiebung der Wassermoleküle einen entsprechenden Teil seiner mechanischen Energie verwenden muss. Deshalb ändert sich mit letzterer auch der Widerstand proportional, und ist dieser ausserdem noch von der Form der Luftblase abhängig. Wir können den Widerstand einer eingetauchten Luftblase — welche nur dann annähernd eine Kugelgestalt annimmt, wenn ihre Teilchen im Wasser von allen Richtungen her ziemlich gleichem Wassersäulendruck ausgesetzt sind — aus den Versuchsergebnissen beurteilen, die mit ähnlich geformten im Wasser bewegten Körpern erhalten wurden. Schon Newton beschäftigte sich damit [1]), dass er verschieden grosse Kugeln ins Wasser senkte, und von deren Absenkungsdauer auf die Kräfte Folgerungen zog, welche zur Zerteilung und Verschiebung der Wasserteilchen erforderlich sind. Du Buat fand durch viele Versuche erwiesen [2]), dass der Bewegung jedes beliebig geformten Körpers unter Wasser die in folgender Formel ausgedrückte Kraft widersteht:

19) . . . . $E = \zeta f \varrho \frac{u^2}{2g}$ allwo u die Geschwindigkeit des beweglichen Körpers im Wasser (m : sec); f die Fläche des grössten auf die Richtung der Bewegung senkrecht widerstehenden Körperquerschnittes (m^2); $g = 9{,}81$ (m : sec^2) die Beschleunigung der Schwere; ϱ das spezifische Gewicht des

[1]) Newton: Philosophiae naturalis principia mathematica. 1687. Liber. II.
[2]) M. Du Buat: Principes d'Hydraulique. Paris 1841. T. II.



Wassers bedeuten. Ferner bedeutet ζ einen von der Form des Körpers abhängigen Erfahrungs-Koëffizienten, welcher nach Duchemin[1]) für zylindrische Körper, deren Durchmesser δ, Länge l ist:

$$\zeta = 1{,}254 \left(1 + \frac{0{,}227\,l}{9\,\delta + l}\right).$$

Demnach wenn:

$\frac{l}{\delta} =$	0	1	2	3	4 . . .	10
wird $\zeta =$	1,254	1,282	1,306	1,330	1,388 . . .	1,400.

Für kugelförmige Körper ist $\zeta = 0{,}5128$.

Der Widerstand wirkt dem in der Flüssigkeit sich bewegenden Körper stets entgegen und verzögert momentan die Bewegung des Körpers, wenn er grösser ist als die momentan treibende Kraft. Die Bewegung des Körpers wird aber beschleunigt oder gleichförmig, je nachdem die treibende Kraft grösser ist als der Widerstand, oder erstere gleich mit letzterem ausfällt. Nun muss der Körper, wenn seine Bewegung beschleunigt wird, diese Bewegungsänderung den voran befindlichen Flüssigkeitsteilchen mitteilen. Vergleichen wir nun den durch eine wirksame Kraft im luftleeren Raume beschleunigten Körper mit demselben, wenn er unter Wasser durch dieselbe Kraft beschleunigt wird: so ist es augenscheinlich, dass im letzterm Fall auf Verminderung der Beschleunigung der Umstand wirkt, dass nicht nur die Masse des Körpers, sondern auch noch die des Wassers durch dieselbe wirksame Kraft beschleunigt werden muss. Die vorhandene Flüssigkeit hemmt demnach auch aus diesem Grunde die Beschleunigung der Luftblase. Ebenso ist zu beachten, dass wenn die Bewegung eines unter Wasser getauchten Körpers durch eine Gegenkraft verzögert wird, diese Gegenkraft grösser sein muss als die im luftleeren Raume, weil auch die bewegte Flüssigkeit mit ihrer Trägheitskraft die Verzögerung des eingetauchten Körpers zu verhindern trachtet. Demnach bewegt sich der in Wasser getauchte Körper durch irgend eine Kraft beschleunigt — wenn man vom Widerstand des Wassers absieht — so weiter, als wenn gleichsam eine Masse mit einem Teil der durch ihr verdrängten Flüssigkeitsmasse vermehrt worden wäre[2]). Ist nun die Masse des eingetauchten Körpers gegen die der mitbewegten Flüssigkeit verschwindend klein, so erscheint dann das Bewegungsgesetz des eingetauchten Körpers nahezu so, wie wenn die Kräfte nur auf Beschleunigung oder Verzögerung der entsprechenden Flüssigkeitsmenge zu wirken hätten.

Bezeichnen $g = 9{,}81$ (m : sec²) die Erdbeschleunigung, k die Beschleunigung einer Luftblase, welche im Wasser infolge Zusammenwirkens senkrechter Kräfte emporsteigt: so wird eine beliebig geformte Luftblase, deren Rauminhalt V und deren spezifisches Gewicht γ ist, ferner deren grösste wagerechte Querschnittsfläche f misst, noch während ihrer Beschleunigung eine Wassermenge vom Rauminhalt Q und dem spezifischen Gewicht ϱ mit sich beschleunigen. Es wird also deren gemeinsame Masse M sein:

$$20\text{a}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad M = \frac{1}{g}(V\gamma + Q\varrho).$$

[1]) M. le Colonel Duchemin: Recherches experimentales sur les lois de la resistance des fluides. Paris 1842. — Die Werte des Koëffizienten ζ erscheinen dort halb so gross wie hier angegeben, weil Duchemin in Formel 19 statt 2 g nur g setzt.

[2]) Siehe: Reif-Lamb: Hydrodynamik. Freiburg 1884. Kap. VII. § 105. — W. Wien: Hydrod. Leipzig 1900, S. 94. — F. Auerbach: Theor. Hydr. Braunschweig 1881. § 28. — Duhem: Recherches sur Hydrodynamique. Paris 1904. 2-ème série, Chapitre V.



Du Buat[1]) hat mittels vieler Versuche bestimmt, dass ein nach seiner Längenrichtung im Wasser bewegter Zylinder, dessen senkrechte Querschnittsfläche f und seine Länge l misst die folgende Raummenge Wasser mit sich beschleunigt:

$Q = \left(0{,}13 + 0{,}705 \frac{\sqrt{f}}{l}\right) V.$ Bezeichnen wir das Verhältnis $\frac{Q}{V} = \lambda$, so ist zum Beispiel: für einen eingetauchten Zylinder, dessen Dicke $\frac{1}{10}$ seiner Länge beträgt, ergibt sich aus letzterer Formel: $\lambda = 0{,}192$.

Für kugelförmige Körper ist nach Versuchen von Du Buat $\lambda = 0{,}45$ bis $0{,}63$ im Mittel $0{,}5$. Also beschleunigt eine Kugel mit sich so viel Flüssigkeit, dass deren Raummenge annäherungsweise die Hälfte des Kugelinhaltes beträgt.

Wenn aber die Luftblase unter Einwirkung der veränderlichen Auftriebskraft P und infolge Gegenwirkung des Widerstandes E sich nach aufwärts bewegt, so ändert sich in jedem Momente nicht nur ihr Rauminhalt, sondern auch die Spannung in ihrem Innern. Nehmen wir behufs Vereinfachung an, dass die Luftblase durch eine senkrechte Mittelfläche in zwei gleiche Hälften geteilt werden kann. Weil nun in praktisch gewöhnlichen Fällen die auf die Luftblase horizontal wirkenden Kräfte ihre gegenseitigen Wirkungen ausgleichen, so können wir behufs Beurteilung der den Gegenstand dieser Untersuchung bildenden Erscheinungen uns blos aufs Betrachten der in senkrechter Richtung wirkenden Kräfte beschränken. Weil also der Auftrieb P der Masse M bei Besiegung des Widerstandes E die Beschleunigung k erteilt, so folgt, da die Trägheitskraft Mk mit den wirksamen Kräften im Gleichgewicht stehen muss, dass

20b) . . . . $\pm Mk = P \mp E.$ Hierbei gilt das obere Vorzeichen bei Bewegung nach aufwärts, und das untere Vorzeichen bei Bewegung der Luft nach abwärts. Setzen wir in letztere Gleichung die Werte von M und P aus Gl. 5 und 20a ein, so wird:

20ab) . . . . . $\pm \frac{k}{g} \cdot (V\gamma + Q\varrho) = V\varrho \mp E.$ Nach Division aller Glieder mit $V\gamma$ erhalten wir:

20c) . . . . . $\pm \frac{k}{g}\left(\frac{\gamma}{\varrho} + \frac{Q}{V}\right) = 1 \mp \frac{E}{V\varrho}.$ Und weil im Sinne der Gl. 3 $\frac{\gamma}{\varrho}$ unbedeutend klein gegen den andern Wert in der Summe ist, so kann ersterer gegen letzteren, welchen wir $\frac{Q}{V} = \lambda$ bezeichneten, vernachlässigt werden. Diese Verhältniszahl ist in so lange konstant, so lange die schwimmende Blase ihre Form behält, wenn auch ihr Raumgehalt V sich verändert; denn mit demselben ändert sich auch die Raummenge Q der entlang der Stromlinien beschleunigten Wassermasse proportional, welche auf der Oberfläche der Flüssigkeit eine Welle bildet. Es ist besonders zu bemerken, dass die beschleunigte Wassermenge Q von der durch den schwimmenden Körper verdrängten Menge verschieden ist, denn letztere existiert auch dann, wenn der Körper in Ruhe oder in gleichförmiger Bewegung beharrt; währenddem eine bestimmte Wassermenge um den Körper herum nur dann seine Ruhe oder Geschwindigkeit verändert, wenn dies die Geschwindigkeitsänderung des Körpers bewirkt. Bei ungleichförmig im Wasser horizontal bewegten Körpern ist

[1]) M. Du Buat: Principes d'Hydraulique. 1841. T. II, § 511.



der vordere Massendruck, welchen man am Stauen des Wasserspiegels erkennt, desto bedeutender und der rückwärtige Druck desto geringer, je stärker die Beschleunigung und je kürzer und flacher der Körper nach vorne ist. Es entstehen also vorn eine Wulst und hinten eine Mulde im Wasserspiegel, welche auf die Grösse des Massenwiderstandes des mitbeschleunigten Wassers deuten. Dieser ist identisch mit der Trägheitskraft:

20d) . . . . $X = \frac{Q\varrho}{g} k$, welche in der Bewegungsgleichung 20ab enthalten ist, und welche vom Druck der Stauwellen herrührt, welche sich um den schwimmenden Körper herumbilden. Deshalb ist λ nur von der Form des bewegten Körpers abhängig. Der Sinn dieser Grösse ist also nach 20d:

20e) . . . . $\lambda = \frac{Q}{V} = \frac{g}{k} \frac{X}{V\varrho}$. Hierin ist $\frac{V\varrho}{g}$ die verdrängte Wassermasse und ähnlich $\frac{X}{k}$ die reduzierte Masse der beschleunigten Stromlinien.

Abb. 4.

Frei emporschwebende Luftblasen und mitbeschleunigte Wasserteile in den Stromlinien.

Bei freier Emporbewegung der Luftblase bewegt sich ein jedes vordere Molekül mit abnehmender senkrechten Komponente der Geschwindigkeit in Richtung der Stromlinien relativ um die Blase herum, bleibt also relativ zurück und kommt schliesslich hinter die Blase, langsamer derselben nachgehend, bis es ins Bereich der folgenden Blase kommt, wie dies in Abb. 4 dargestellt ist.

Aus dem Bisherigen ist ersichtlich, dass man mit verdichteter Luft so Wasser heben kann, dass man in ein ins Wasser getauchtes Steigrohr Luft hineintreibt, welche infolge ihrer Auftriebskraft, Dehnbarkeit und Undurchdringlichkeit dem Wasser eine Beschleunigung nach aufwärts erteilt, wodurch es über das Ausflussniveau gehoben werden kann. Man pflegt den Vorgang so zu erklären, dass die Luft im Steigrohr mit dem Wasser vermengt würde und somit das spezifische Gewicht der Mischung kleiner wird, als das des Brunnenwasserstandes. Man soll aber solcher Erklärungsweise aus dem triftigen Grunde ausweichen, weil die direkte Ursache des Wasserhebens die Bewegung der Luft ist, welche durch den wirksamen Auftrieb entsteht. Und nur der Auftrieb ist die direkte Folge des spezifischen Gewichtsunterschiedes, welcher auch ohne Bewegung hervorzubringen eventuell besteht, wenn der Auftrieb durch einen entsprechend grossen Gegenwiderstand aufgehoben wird, also unwirksam ist.

V. Wirkung des kontinuierlichen Luftauftriebes.

Nach obiger elementaren Voruntersuchung betrachten wir den Fall, wenn die Lufteinströmung ins Wasser und deren Durchzug durch dasselbe fortdauernd ist. In Abbildung 5 erscheint ein Luftleitungsrohr im Innern des Steigrohres, welches im Bohrloch des artesischen Brunnens steckt und bis zu einem vom Ausflussniveau des Steigrohres gemessenen H_i tiefen Niveau hinabgelassen ist. Der von der unteren Mündung des Luftrohres gemessene höchste Wasserstand im Brunnenbohrloch sei h_m hoch. Nun wird dieser Wasserstand infolge Einblasens von Luft ins Wasser im Brunnenrohr bis zu einem veränderlichen h hohen Wasserstande niedriger sinken, währenddem der Wasserstand im Steigrohr bis zu einem veränderlichen H hohen Niveau steigen wird. Der Beharrungszustand wird nun eintreten, wenn bei einem bestimmten abgesenkten Wasserstande h_s im Brunnen der Wasserzufluss Q_s m^3 : Sek. genau so viel beträgt, als am H_i hohen Niveau aus dem Steigrohr gehobenes Wasser hinausfliessen kann, und durch das Luftrohr in den Brunnen gleichförmig die vor der Luftrohrmündung befindliche Raummenge Luft V_1 m^3 : Sek. einströmen kann. Das gehobene Wasser muss demnach aus dem Steigrohr über das Ausflussniveau bis zu einer Steighöhe H_s emporsteigen, um dann durch das Gefälle H_s—H_i überzuströmen.

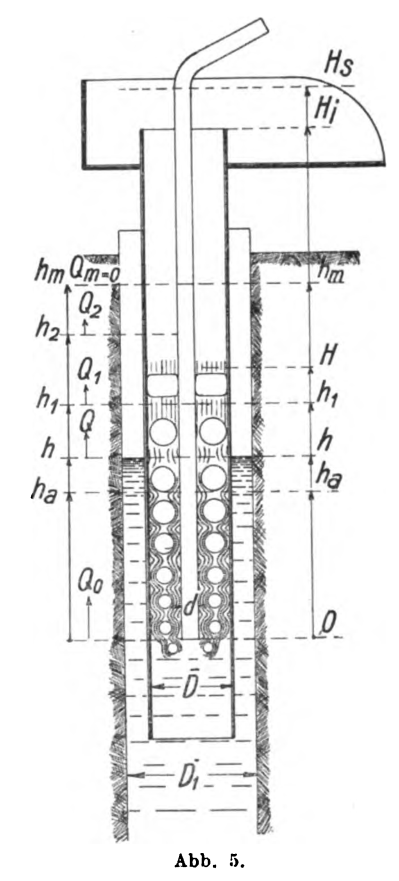


Abb. 5.

Druckluft-Wasserheber mit innerhalb des Steigrohres hinabgelassenem Luftrohr.

Ist hingegen die Zuströmung von der Quelle geringer als die gehobene Wassermenge, so sinkt der Wasserstand h_s im Brunnenrohr. Hingegen steigt derselbe im entgegengesetzten Fall, wenn nämlich die gehobene Wassermenge (sei es infolge Verminderung der einströmenden Luftmenge oder Widerstandsvermehrung im Steigrohr) oben langsamer abfliesst. Der Wasserstand im Brunnen steigt dann gemäfs der Ergiebigkeit der Quelle, welche dem Gegendruck dieser h_s hohen Wassersäule entspricht, ebenso wie dies beim Pumpen aus gewöhnlichen Brunnen beobachtet werden kann, wenn die Pumpe weniger Wasser hebt, als zufliesst.

Es sei nun V (m^3 : S) der Rauminhalt, G (kg : S) das Gewicht und γ spez. Gewicht der durch einen f (m^2) weiten Querschnitt hindurchströmenden Luft; ferner sei u (m : S) die Geschwindigkeit, mit welcher die Luft im Steigrohr emporsteigt, so wird im allgemeinen sein:

21) . . . . $V = f\,u = \frac{G}{\gamma}$. Demnach drückt die folgende Formel das Gewicht der durch ein beliebiges Niveau in der Sek. hindurchgehenden Luftmenge, welche wir fernerhin einfach die Luftstromstärke nennen wollen, aus.

22) . . . . $G = V\gamma = f u \gamma$. Betrachten wir nun den Fall, wenn die Luft mit der Geschwindigkeit u_1 durchs Niveau der Luftrohrmündung ins Wasser tritt, und das Steigrohr genügend weit ist, damit der Luftstrom frei beschleunigt durch den Auftrieb emporsteigen kann, so wird derselbe bald in Blasen zerreissen, weil die höheren Luftteile stärker beschleunigt werden als die tieferen. Nun nimmt während der unmessbar kleinen Zeit dt die Geschwindigkeit der entsprechend kleinen Raummenge Vdt Luft um $du = k dt$ zu. Ähnlich nimmt die Auftriebskraft P in der Sek. um Pdt und der Widerstand um Edt zu. Demnach folgt aus Gl. 19 und 21, dass die Zunahme des Widerstandes gegen Fortbewegung der im Wasser frei schwebenden Luft ist: $E dt = \frac{\zeta}{2} V \varrho \frac{u}{g} dt$, welches in Gl. 20c eingesetzt ergibt

23) . . . . . . $k = \frac{du}{dt} = \frac{g}{\lambda}\left(\pm 1 - \frac{\zeta}{2}\frac{u}{g}\right)$. Setzen wir behufs einfacher Schreibweise die Konstantengruppe $\frac{2g}{\zeta} = u_m$, so folgt aus 23, dass

$$dt = \frac{\lambda}{g}\, u_m \frac{du}{\pm u_m - u}.$$

Durch Integration dieser Gleichung zwischen Grenzen $t = o$ bis t und $u = u_1$ bis u erhalten wir annäherungsweise die Zeit, während der die mit Geschw. u_1 aus dem Luftrohrmündungsniveau nach aufwärts steigende Luft bis zu einem H hohen Niveau sich bewegt; und dieser Zeitraum ist:

24) . . . . . . $t = \frac{\lambda}{g}\, u_m \log \text{nat} \frac{\pm u_m - u_1}{\pm u_m - u}$. Die Formel gibt durch Umrechnung die Geschwindigkeit, als Funktion der Zeit in folgender Form, in welcher e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen und $v = \frac{g}{\lambda u_m} = \frac{\zeta}{2\lambda}$ bedeuten:

25) . . . . $u = u_m - \frac{u_m - u_1}{e^{vt}}$ für den Aufwärtsstrom und

26) . . . . $u = \frac{u_m + u_1}{e^{vt}} - u_m$ für den Abwärtsstrom.

Interessant ist die Auskunft, welche Gl. 25 über das Bewegungsgesetz der Luftblasen im Wasser gibt. Trägt man nämlich (Abb. 6) die Zeiten t als Abszissen und die Geschwindigkeiten u als entsprechende Ordinaten in ein Koordinatensystem auf, so erhält man für eine jede verschiedene Einströmungsgeschwindigkeit u_1 eine andere Kurve, welche alle sich einer und derselben zur Abszisse parallelen Asymtote $B = u_m$ nähern. Das Emporsteigen einer Luftblase im Wasser kann demnach ungleichförmig beschleunigt oder verzögert erfolgen, je nachdem deren Einströmungsgeschwindigkeit kleiner oder grösser als $u_m = \frac{2g}{\zeta}$ war. Nun ist der Widerstands-Koeffizient $\zeta = 0{,}5128$ für kugelförmige und $\zeta = 1{,}4$ für langgestreckte zylinderförmige Blasen. Die beiden extremen Fälle in Rechnung gezogen, fällt demnach der Wert von u_m zwischen 38,2 und 14,0 m : Sek.

Die unter Wasser geblasene Luft zerteilt sich umsomehr in kugelförmige Blasen, je langsamer sie eingeblasen wird und je weiter das Steigrohr ist. Bläst man Luft nach aufwärts so unter Wasser, dass die Einströmungsgeschwindigkeit $u_m = 38{,}2$ m : Sek. betrage, und zerfällt diese Luft sofort in kugelförmige Blasen,

so steigen dieselben, wie aus den Schaulinien (Abb. 6) ersichtlich ist, mit gleichförmiger Geschwindigkeit empor. Die Luftblasen steigen, sehr schnell eingeblasen, mit zunehmender Verzögerung und abnehmender Geschwindigkeit, langsam eingeblasen, mit abnehmender Beschleunigung und zunehmender Geschwindigkeit empor, was aus Gl. 23 in Verbindung mit 25 und 26 gefolgert werden kann.

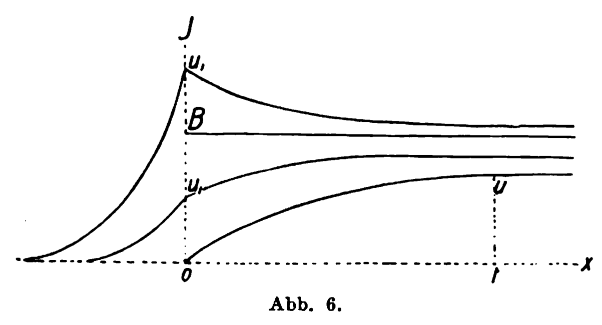


Abb. 6.
Schaulinien der Geschwindigkeitsänderungen der im Wasser schwebenden Luftblasen.

Wird die Luft nach abwärts eingeblasen, so nimmt die Geschwindigkeit derselben nach Gl. 26 mit der Zeit stets ab, so wie die Beschleunigung nach Gl. 23 stets negativ wird. Das heisst die Luft bewegt sich abwärts immer verzögert und ihre Geschwindigkeit nimmt rapid bis zu Null ab.

In Abb. 5 ist das System skizziert, bei welchem die Luft nach abwärts, und in Abb. 7, 8, 9 einige Systeme dargestellt, bei welchen die Luft nach aufwärts ins Wasser strömt.

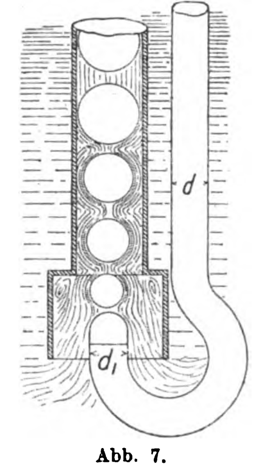


Abb. 7.
System Pohlé (New-York).

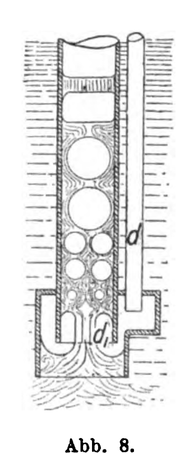


Abb. 8.
Mammutpumpe (Borsig'scheMasch.-Fabr. Berlin).

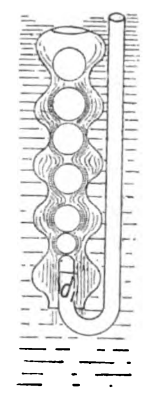


Abb. 9.
Wellrohrpumpe (Krause & Co., Masch.-Fabr. Berlin).

Wie immer geartet das System aber sei, ist das Heben von Wasser bis zu einem bestimmten Ausflussniveau nur dann möglich, wenn die frei emporgetriebenen Luftblasen sich so gestalten, dass sie einzeln oder unterwegs vereint in einem Niveau, welches niedriger ist als die gegendrückende Wassersäule h_s, die ganze Weite des Steigrohres erfüllen. Ist also die Luftstromstärke zu gering und die Weite des Steigrohres im Verhältnis zu ersterer zu gross, so bilden die emporsteigenden Blasen im Steigrohr nur Wellen wie in Abb. 3 und verlassen deren Oberfläche, bevor dieselben das Ausflussniveau erreichen konnten. Ist das Steigrohr minder weit, jedoch die Ergiebigkeit des Brunnens dem nicht entsprechend

gross, so werden die frei sich empor bewegenden Luftblasen doch im höheren Niveau infolge Ausdehnung und Vereinigung eventuell die ganze Weite des Steigrohres ausfüllen können, und das Wasser demnach stossweise über das Ausflussniveau heben.

VI. Wirkungsweise des intermittierenden Wasserhebens.

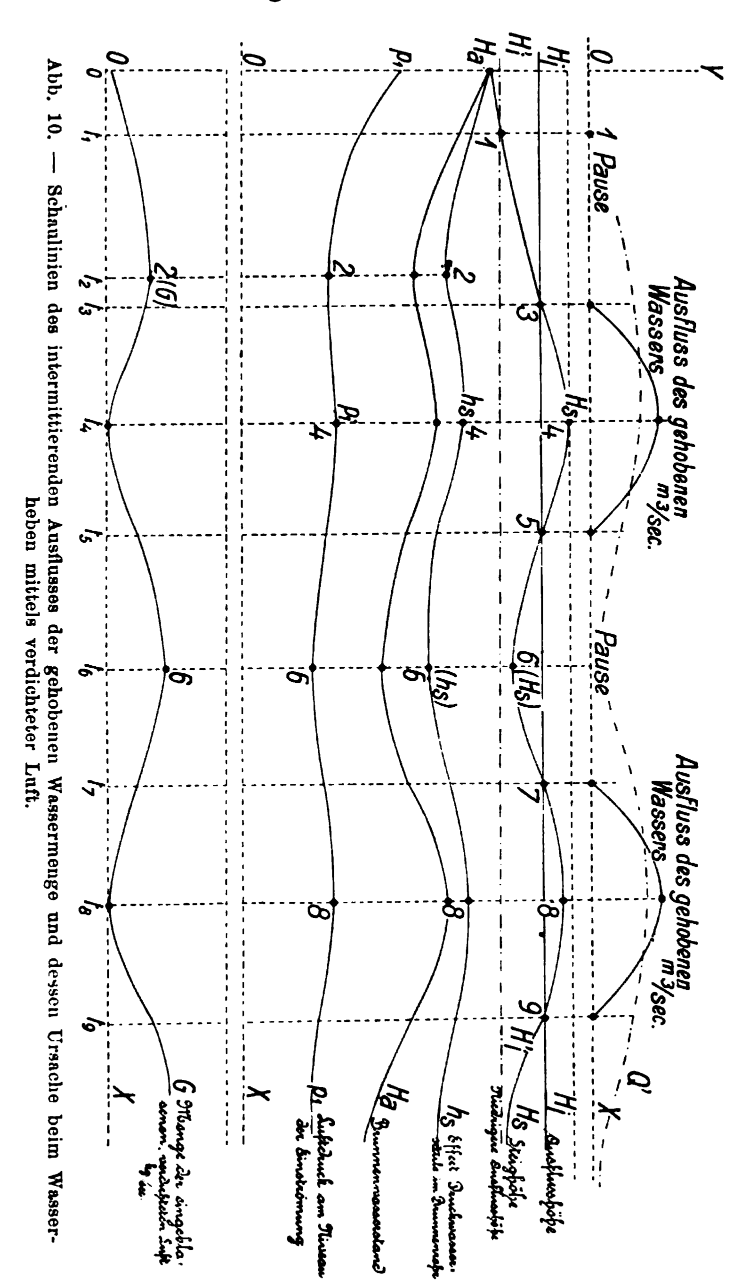


Abb. 10. — Schaulinien des intermittierenden Ausflusses der gehobenen Wassermenge und dessen Ursache beim Wasserheben mittels verdichteter Luft.

Eine der rätselhaftesten Erscheinungen ist bei Hebeanlagen, welche mit verdichteter Luft betrieben werden, dass trotzdem die Luftpumpe gleichförmig dieselbe Luftmenge in den Rezipienten presst und das Manometer an letzterem augenscheinlich während des Betriebes lange dauernden gleichförmigen Luftdruck zeigt, folglich scheinbar die gleiche Luftmenge zu- und abgeht, dennoch der Ausfluss des gehobenen Wassers periodisch stärker und schwächer wird und in vielen Fällen sogar in periodischen Intervallen ganz aufhört, um nach vielen Sekunden plötzlich wieder zu beginnen. Der erstere Fall kommt bei ergiebigeren und letzterer Fall bei schwächeren Brunnen vor, wenn die Dimensionen des Steigrohres und die Eintauchtiefe des Luftleitungsrohres zur Ergiebigkeit des Brunnens nicht passen.

In Abb. 10 ist der Vorgang bei einer inter-

mittierend wirkenden Brunnenanlage schematisch durch Schaulinien veranschaulicht. Es sind der Verlauf der Luftstromstärke im unteren, der des Repulsivdruckes der ins Wasser strömenden Luft, der effektiven und reduzierten Eintauchtiefe des Luftrohres, der Steig- und Ausflusshöhen im mittleren und der Verlauf der Ausflussstärke des gehobenen Wassers im oberen Koordinaten-System als Ordinaten so dargestellt, dass die Zeit als Abszisse für alle erwähnten Veränderlichen gemeinsam verläuft.

Daraus ist zu ersehen, dass zu Beginn des Austrittes der Luft aus dem Luftleitungsrohr der Wasserstand im Brunnen am höchsten ist, und H_a in diesem Momente zugleich die effektive Eintauchtiefe ist. Da einfache Luftpumpen mit mangelhafter Kühlung die Verdichtung der Luft nur schwer über effektive 7 Atm. treiben können, welche Spannung einer 70 m betragenden Eintauchtiefe entspricht, so wird die Überwindung höherer Wasserstände als diese nicht recht möglich; daher man zwei Luftrohre anzuwenden pflegt, von denen das eine nur 30—40 m unter den höchsten Wasserspiegel reicht und mit welchem man den Betrieb beginnt. Dieser wirkt schon bei 3—4 Atm. Spannung. Ist später der Wasserstand schon gesunken, so setzt man mit dem zweiten bis zu einem tieferen Niveau herabreichenden Luftrohr den Betrieb fort.

Sofort als Luft ins Steigrohr eingetreten ist, senkt sich der Brunnenwasserstand grösstenteils, während dem die Steighöhe H_s sich bildet. Unter Brunnenwasserstand ist hier derjenige zu verstehen, welcher sich bilden würde, wenn momentan die Luft im Wasser nicht vorhanden wäre; und unter effektiver Eintauchtiefe ist die Druckwassersäule zu verstehen, welche durch Erhöhung des früher erwähnten Wasserstandes entweder wirklich oder als gleichwertiger reagierender Rückdruck durch die Bewegung der Luft im widerstehenden Mittel sich bildet. Wirklich ist sie als Wassersäulendruck vorhanden, wenn das Steigrohr im weiteren Brunnenrohr steckt; als Rückdruck ist sie vorhanden, wenn das Brunnenrohr zugleich als Steigrohr dient. Beide trachten sowohl die Ergiebigkeit der Brunnenquelle als auch die Luftausströmung aus dem Luftrohr zu vermindern.

Die Luftstromstärke muss also infolge Fallens der Drucksäule h_s bis zum Zeitpunkte t_2 steigen. Letztere kann aber nur so lange fallen, bis die vom tieferen Niveau herkommende Zuflussstärke des Brunnens dem eine Grenze setzt. Unterdessen dringt Luft und Wasser ins Steigrohr, wodurch die Steighöhe schliesslich die Ausflusshöhe H_i erreicht. In Abb. 10 sind zwei Auflusshöhen gezeichnet, die niedrige ist punktiert. Die letztere wird durch das emporsteigende Wasser früher bei t_1 erreicht, und sinkt die Steighöhe auch im späteren Verlaufe nicht unter ihr Niveau. Es entsteht demnach ein fortdauernder Ausfluss, wenn auch dessen Stärke periodisch schwankt.

Ist die Ausflussöffnung des Steigrohrs höher angelegt, so erreicht das emporsteigende Wasser dieselbe später in Zeit t_3. Der Ausfluss beginnt damit und dauert nur solange, bis sich die im Wasser schwebende Luftmenge allmählich vermindert, infolgedessen die Steighöhe H_s sich auch vermindert und bei t_3 unter das Ausflussniveau sinkt. In diesem Fall ist der Betrieb der Anlage intermittierend.

Es taucht nun die Frage auf, warum sich die im Wasser schwebende Luftmenge periodisch vermindert. Dessen Ursache ist die Steigung des Wasserstandes h_s bis zu einer solchen Höhe infolge des Brunnenzuflusses[1]) während Verminderung

[1]) Hierüber folgt ausführliche Erklärung im VIII. Abschnitt.

der Steighöhe im Steigrohr, dass die Luftrohrmündung automatisch durch den Druck der Säule einen Moment gesperrt wird, ohne dass der Repulsivdruck der vom Luftkessel kommenden Luft diesen Säulendruck momentan zu überwinden vermag. Dies kann nur allmählich geschehen und dementsprechend steigt dann vom Zeitpunkte t_4 an die Luftstromstärke abermals.

Dass diese Druckänderungen der Spannungsmesser am Luftkessel gewöhnlich nicht verspürt, hat folgende Gründe: und zwar sind die Druckschwankungen gering, betragen gewöhnlich nur einige Meter Wassersäulendruck, dessen Wirkung nicht so schnell durch das lange Luftrohr in den voluminösen Rezipienten sich fortpflanzen kann. Ausserdem hat die Luft im Steigrohr nahezu die gleiche Temperatur des Brunnenwassers, währenddem im Rezipienten die Temperatur der Luft 20—35° C. beträgt und daher ohnedies immer hier die Spannung der Luft grösser ist als an der Luftrohrmündung. Das Absperren der Luftrohrmündung bewirkt daher nur allmählich die Ausgleichung des Repulsivdruckes im Luftkessel und in der langen Leitung, wo jeder Teil eine andere Temperatur besitzt. Ein allmählicher Ausgleich aber ist hier nicht möglich, da gleich nach dem Absperren des Luftaustrittes die Luftausströmung wieder beginnt.

Mit der Änderung der Luftstromstärke ändert sich auch natürlich die Einströmungs-Geschwindigkeit der Luft u_1. Nachdem in jedem Zeitmomente eine andere Luftmenge, die eine andere Anfangsgeschwindigkeit hat, unter Wasser tritt, so brauchen die schneller eintretenden grösseren Luftteile eine geringere Zeit, um im Steigrohr an die Oberfläche zu kommen, als die kleineren und langsamer eintretenden.

In Abb. 11 ist im unteren Koordinatensystem schematisch die Schaulinie der periodisch veränderlichen Einströmungs-Geschwindigkeit der Luft so dargestellt, dass als Abszisse die verlaufende Zeit, und als Ordinaten die Geschwindigkeiten aufgetragen sind. Im oberen Koordinatensystem sind als Ordinaten die Steighöhen

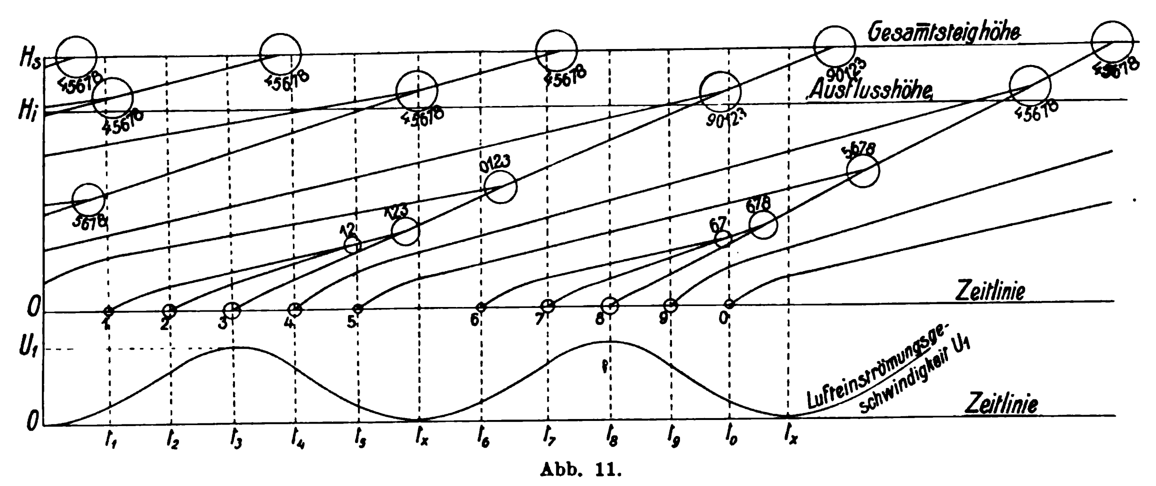


Abb. 11.

Schaulinien der Vereinigung der langsam emporsteigenden Luftblasen mit stärker strömenden nachfolgenden Luftblasen als Ursache des intermittierenden Ausstossens von Wasser und Luft.

der nach gleichen Zeitunterschieden einströmenden Luftmengen aufgetragen, und die in der Sekunde einströmenden Luftmengen sind je nach ihrer Grösse mit relativ verschieden grossen Kreisen veranschaulicht. Aus diesen Schaulinien wird

die Ursache ersichtlich, warum bei intermittierender Anlage die Luftmengen nach Zeitintervallen in grosser Menge auf einmal, also gleichsam mit Explosion, ausbrechen. Die schwachen Luftmengen, welche während der Verminderung der Luftausströmung ins Wasser eintreten, werden, saumselig im Wasser schwebend, durch die in der nächsten Periode aufsteigenden grösseren und eilenden Luftmengen gleichsam verschlungen. Grosse und spätere grössere Blasen verschlingen die früheren kleineren Luftblasen und schliesslich bilden alle nur einen grossen Luftklumpen, der allenfalls dann die ganze Weite des Steigrohres ausfüllend, kolbenartig vor sich Wasser schiebt und rapid aus dem Steigrohr schiesst.

Nach Beobachtungen von Josse[1]) stieg in dem den Versuchen dienenden Steigrohr die Luft in Form kleiner Blasen mit dem Wasser schaumartig gemischt im Beharrungszustande des Einblasens empor. In gewissen Zeiträumen aber wurde dieses Gemisch von grossen Luftblasen durchsetzt, die sich durch das aufsteigende Gemisch scheinbar hindurchdrängten. Diese Erscheinung wird wohl aus Abb. 11 erklärlich sein. In derselben sind die in verschiedenen Zeitpunkten eintretenden Luftblasen an der Abszissenachse nummeriert und die auf höheren Niveaus zusammentreffenden Luftblasen durch grössere Kreise und mit denselben Nummern gekennzeichnet, von woher die Teile der vereinzelten Luftmengen stammen.

VII. Bedingnis des ununterbrochenen Wasserhebens.

In Abb. 4 erscheint V Raummenge Luft, welche durch f Querschnittsfläche in der Sekunde mit Wasser umgeben hindurchgeht, als kugelförmige einzelne Blase; sie kann aber auch als die Summe vieler kleiner im Wasser zerstreut schwebenden Blasen angesehen werden. Ihre Geschwindigkeit im H hohen Niveau ist $u = \frac{V}{f}$, währenddem die mittlere Geschwindigkeit der in Richtung der Stromlinien nach aufwärts bewegten Wassermenge durch eine entsprechende Querschnittsfläche $f' - f$ durchschnittlich $u' : (f' - f)$ ist. Steigt nun die Luftblase frei höher und dehnt sich infolge Verminderung des Niveaudruckes um dV aus, so muss auch die Masse der Stromlinien um $\lambda dV = dQ$ zunehmen. Nun steigt in jedem Zeitmomente nach Gl. 14a $Vdt = dW$ Luftmenge durchs H hohe Niveau, welche Luft mit der beschleunigten Wassermenge $Qdt = \lambda dW$ durch Querschnittsfläche f' sich gemeinsam bewegt. Ist nun die Weite des Steigrohrs $F \leqq f'$, so werden die bewegten Wassermoleküle allenfalls auch oberhalb der effektiven Eintauchtiefe die ganze Weite des Steigrohrs erfüllen und nicht zurückfallen, weil im ganzen Steigrohrquerschnitt kein stromlinienfreier Raum vorhanden ist. In gesteigertem Maſse muss dies der Fall sein, wenn während weiterem Auftriebe der Querschnitt der vereinten Luftblasen den ganzen Steigrohrquerschnitt ausfüllt, wie dies aus Abb. 7 u. 8 ersichtlich ist, wo dann $F = f' = f$ gleich gross werden und die Moleküle der Stromlinien hinter der Luftblase vereint mit den vorderen Molekülen der Stromlinien der nachfolgenden Blase zwischen die

[1]) S. Zeitschrift d. Vereins deutsch. Ing., Bd. 32. Jahrg. 1898, Heft 36.



zwei kolbenartig weiter getriebenen Luftblasen bewegt werden. Dieser Zustand tritt aber in um so niedrigerem Niveau ein je kleiner die Geschwindigkeit u_1 und je grösser die Menge V_1 der einströmenden Luft ist.

In dem Niveau, wo die Luftblasen die ganze Weite des Steigrohrs einnehmen, hört das freie Emporschweben der Blasen auf, folglich ändert sich das in Gl. 24 u. 25 ausgedrückte Bewegungsgesetz und die vor der Blase Q versperrte Wassermenge hört auf zu wachsen, wenn auch während dem weiteren Fortschreiten die Luftblasen infolge niederen Niveaudruckes sich ausdehnen. Mit anderen Worten: die Verhältniszahl λ behält nur so lange ihre konstante Bedeutung, bis die Luftblasen freischwebend sich empor bewegen. Wenn also nahe zum Niveau der Luftrohrmündung wie in Abb. 7 u. 8 die Luftblasen schon die ganze Weite des Luftrohres ausfüllen können, wo $V_1\,m^3$: Sek. Luft $Q\,m^3$: Sek. mitbeschleunigte Wassermenge vor sich kolbenartig zu schieben beginnen muss, so wird der Betrieb nur dann ununterbrochen sein, wenn der Zufluss im Brunnen ebenso gross ist, wie diese erwähnte mitbeschleunigte Wassermenge. Und daraus folgt dann, dass der effektive momentane Wasserstand h_s konstant und folglich auch die Luftstromstärke V_1 konstant bleiben müssen. Bei allen unseren folgenden Untersuchungen setzten wir diesen Beharrungszustand voraus. — Das Konstanthalten der erwähnten drei Grössen kann aber nicht stattfinden, wenn die Luftblasen in entsprechend weitem Steigrohr frei emporsteigen, weil in solchem Fall die sich in oberen Niveaus ausdehnenden Luftblasen immer mehr und mehr Wasser mit sich beschleunigen müssen, folglich Wasserstand, Brunnenzufluss und Luftzuströmung schwankend werden.

Bezeichnen wir nun die gemeinsame Geschwindigkeit der in irgend einem H hohen Niveau durchströmenden Luftblase und des Wassers während dem Beharrungszustande mit U, so ist offenbar die in der Zeiteinheit durchströmende Menge, welche im Steigrohr den Wasserstand über h um dH hebt.

$$27) \quad \ldots\ldots \quad FU = F\frac{dH}{dt} = Q + V.$$

Entwickeln sich nun beim Niveau der Luftrohrmündung kugelförmige Blasen, welche infolge weiter Mündung des Luftrohres und engen Steigrohres in unbedeutend höherem Niveau die ganze Weite des Steigrohres einnehmen und bezeichnen wir die Raummenge Luft, welche in der Sekunde aus dem Luftrohre ausströmt mit V_1 und die mit der mitbeschleunigten Wassermenge Q gemeinsame Geschwindigkeit ebendort mit U , so folgt aus letzterer Gleichung das

$$28) \; U_1 = \frac{Q + V_1}{F} = \left(1 + \frac{V_1}{Q}\right)\frac{Q}{F} = \left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)\frac{Q}{F} = \left(1 + \frac{Q}{V_1}\right)\frac{V_1}{F} = (1+\lambda)\frac{V_1}{F}.$$

Weil nämlich jede von der Luftrohrmündung aufsteigende Luftblase im Momente, da sie die ganze Weite des Steigrohres erreicht, die vorderen Wassermoleküle ihrer Stromlinien, sowie die Moleküle der hinteren Stromlinien der vor ihr emporgestiegenen Luftblase, deren Raummenge zusammen $Q\,m^2$: Sek. $= \lambda V_1$ ist, absperrt, welche Menge infolge dieser Sperre während der Weiterbewegung konstant dieselbe bleibt, so konnte in letzterer Formel die Luftmenge V_1 der Konstanten $\frac{Q}{\lambda}$ gleichgestellt und durch dieselbe ersetzt werden. — Nun ändert sich nach der Schichtenbildung im Steigrohr sowohl das in Gl. 20c ausgedrückte Bewegungsgesetz, als auch der Widerstand E; denn $\frac{Q}{V}$ ist nicht mehr konstant. Die treibende Kraft ist

nicht mehr der Auftrieb, sondern die Repulsivkraft der Luft, und der zu überwindende Widerstand rührt nicht mehr von der Zerteilung der Wassermoleküle, sondern von der Reibung der Flüssigkeit an den Rohrwänden her. Dieser Widerstand wächst direkt proportional mit der Grösse der benetzten Rohrwände; ist jedoch nicht abhängig von der Rohrweite. In dem in Abb. 5 dargestellten allgemeinen Fall ist der benetzte Umfang der beiden Rohrwände $(D + d)\pi$, worin D innerer Durchmesser des Steigrohres, d äusserer Durchmesser des Luftrohres und $\pi = 3{,}14$ (Ludolf'sche Zahl) bedeuten. Bedeutet ferner $\mu_1 = 2{,}63$ kg/m² Widerstand, welchen die Molekular-Lagerung des Wassers in einer Ebene der fortdauernden Verschiebung über der zunächst liegenden, also bei Abscheerung entgegensetzt[1]), so ist der Reibungswiderstand der Rohrwände auf dem Wege, welchen das Wasser während der Zeit dt durchzieht:

29a) . . . . $E = \mu_1 (D + d)\pi \frac{dH'}{dt}$, worin dH' den Teil der Steigrohrhöhe bezeichnet, in welchem die in der Zeit dt durch ein H hohes Niveau durchgeströmte Wassermenge die Rohrwände berührt. Nachdem diese Wassermenge

29b) . . . . $Q\,dt = F\,dH'$ ist, in welchem die Weite des Steigrohres, wenn das Luftrohr innerhalb desselben hinabgeleitet ist, worin

29c) . . . . $F = (D^2 - d^2)\frac{\pi}{4} = (D + d)(D - d)\frac{\pi}{4}$, so folgt hiermit aus 29a und b, dass die in der Sekunde wirksame Gegenkraft

30) . . . . $E = \frac{4\mu_1 Q}{D - d}$ ist, worin $4\mu_1 = 4 \times 2{,}63 = 10{,}52$ bedeutet. Dieser Widerstand und das Eigengewicht der Wasserschichte widerstehen dem Repulsivdruck der Luftschichte unter ihr; und weil letztere beide ersteren Kräfte in der Regel zu überwinden vermag, entsteht die Emporbewegung der Wasserschichten mittels der expandierenden Luftschichten.

VIII. Bestimmung der Brunnenergiebigkeit.

Stellen wir uns vor, dass ein Brunnen bis zu dem Niveau der Luftrohrmündung ausgepumpt worden wäre, so wird während der folgenden Ruhepause im allgemeinen der Wasserstand anfänglich schneller, dann allmählich langsamer infolge Zuflusses sich heben, sodass nach einer gewissen Zeit t eine h hohe Wassersäule sich bilden wird. Eine jede solche Steigung des Wasserstandes geht als Funktion der Zeit t nach mehrfach zusammengesetztem parabolischem Gesetze vor sich, dessen geometrische Form (Abb. 12, siehe Seite 20) für jeden Brunnen charakteristisch ist und dessen Gleichung im Allgemeinen lautet[2]):

31) . . . . $h = at - bt^2$. In dieser sind a und b mittelwertige charakteristische Konstanten der Parabel, die unbekannt sind, jedoch mittels

[1]) Siehe Heinemann's Hyrodynamik. Hagen 1872, I. und IV. Abschnitt.

[2]) S. des Verfassers: Brunnenergiebigkeit und Pumpenanlagen. Wien 1900, Hartlebens Verlag.



einiger versuchsweiser Beobachtungen ersetzt werden können. Bezeichnen wir die Höhe des höchsten Wasserstandes mit h_m, zwei beobachtete andere Höhen, bis zu welchen man noch mittels Pumpen den Wasserspiegel absenken kann, mit h_1 und h_2 und einen beliebigen tieferen etwa momentan unerreichbaren Wasserstand mit h (Meter), die zugehörigen Zeiten t_1, t_2, t (Minuten) und die zugehörigen Zuflussstärken mit Q_1, Q_2, Q (m^3 : min), so ist die Höhe des Wasserstandes während der Ruhepause nach der Zeit t_1:

32) . . . . $\begin{cases} h_1 = a t_1 - b t_1^2 \text{ und ähnlich nach Zeit } t_2, \\ h_2 = a t_2 - b t_2^2 \text{ und so weiter.} \end{cases}$

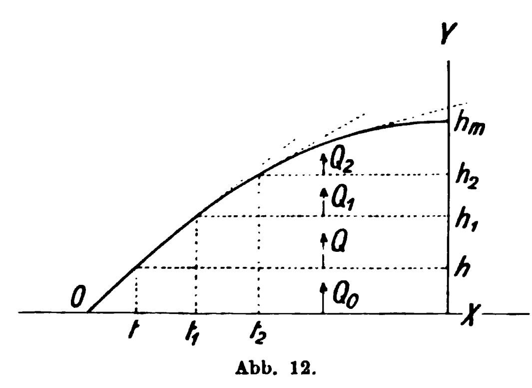


Abb. 12.

Schaulinie des Steigens abgesenkter Brunnenwasserspiegel während der Pumppause.

Wir wollen nun zuerst beweisen, dass wenn in einem Brunnen das Wasser unter hydraulischem, wenn auch allmählich nur nicht sprungweise, veränderlichem Drucke quillt, die Steigung des Wasserstandes immer mit der Zeit nach einem parabolischem wahrscheinlichem Gesetz wächst, bei Anwendung dessen alle von den Beobachtungsdaten oder zufälligen Unregelmäſsigkeiten abweichenden Fehler in den Resultaten minimale werden. Setzen wir den Fall, dass durch Anwendung der Gleichung 31 durch Einsetzen der Beobachtungsdaten wie es in 32 geschehen ist, Fehler erstünden, die in jedem einzelnen Anwendungsfalle $\nu_1 t_1$, $\nu_2 t_2$, $\nu_3 t_3 \ldots$, $\nu_n t_n$ und im allgemeinen νt gross wären, wenn wir nach Gl. 31, 32:

33) . . . . $\begin{cases} \nu = \frac{h}{t} - a - bt \\ \nu_1 = \frac{h_1}{t_1} - a - bt_1 \\ \nu_2 = \frac{h_2}{t_2} - a - bt_2 \text{ und so fort bekämen.} \end{cases}$

Nun ist der Fehler, welchen wir durch Anwendung der Gleichung machen, ein Minimum, wenn wir die konstanten Koëffizienten der Formel 31 so auf Grund der experimentellen Daten bestimmen, dass die Summe der Fehlerquadrate nach der Gauss'schen Methode ein Minimum werde. Das heisst es soll

$$\frac{\Sigma d\nu^2}{da} = \frac{2\Sigma\nu d\nu}{da} = o \text{ und}$$

$$\frac{\Sigma d\nu^2}{db} = \frac{2\Sigma\nu d\nu}{db} = o \text{ werden.}$$

Nun ist $\frac{d\nu}{da} = -1$ und $\frac{d\nu}{db} = -t$, demnach ist

$$\Sigma\frac{\nu d\nu}{da} = -(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 \ldots \nu_n) = -[\nu] = o$$

$$\Sigma\frac{\nu d\nu}{db} = -(\nu_1 t_1 + \nu_2 t_2 + \nu_3 t_3 \ldots \nu_n t_n) = -[\nu t] = o.$$

Auch weiterhin die Summierungen mit ähnlichen eckigen Klammern bezeichnet, resultieren durch Einsetzen der Werte ν aus 33 die folgenden zwei Normalgleichungen:

$$\begin{cases} -\left[\frac{h}{t}\right] + n\,a + b\,[t] = 0 \\ -[h] + a\,[t] + b\,[t^2] = 0. \end{cases}$$

Hieraus folgt nach dem Eliminations-Verfahren, dass es sei

$$34) \quad . \quad . \quad . \quad a = \frac{-[h]\,[t] + \left[\frac{h}{t}\right][t^2]}{n\,[t^2] - [t]^2}; \quad b = \frac{n\,[h] - \left[\frac{h}{t}\right][t]}{n\,[t^2] - [t]^2},$$

worin n die Anzahl der Beobachtungen bedeutet.

Beobachtet man das Steigen des Wasserstandes in gleichen τ grossen Zeitintervallen, so dass dann

$$t_1 = \tau \qquad t_2 = 2\,\tau \ldots \qquad t_n = n\,\tau$$

ist und setzt diese Zeitwerte in Gl. 34 ein, so erhält man für:

$$[t] = (1 + 2 + \ldots n)\,\tau = n\,(n + 1)\,\frac{\tau}{2}$$

$$[t^2] = (1 + 2^2 + 3^2 + \ldots n^2)\,\tau^2 = n\,(n + 1)\,(2\,n + 1)\,\frac{\tau^2}{6}$$

$$\left[\frac{h}{t}\right] = \left(\frac{h_1}{1} + \frac{h_2}{2} + \frac{h_3}{3} + \ldots \frac{h_n}{n}\right)\frac{1}{\tau} = \left[\frac{h}{x}\right]\frac{1}{\tau}.$$ Also ist

für	2	3	4	Beobachtungen
$[t] =$	$3\,\tau$	$6\,\tau$	$10\,\tau$	Minuten
$[t^2] =$	$5\,\tau^2$	$14\,\tau^2$	$30\,\tau^2$	Minuten,

welche, in Gl. 34 eingesetzt, ergeben:

$$35a) \quad a \cong \frac{-h_2 + 4\,h_1}{2\,\tau} \cong \frac{-4\,h_3 + 3\,h_2 + 24\,h_1}{18\,\tau} \cong \frac{-h_4 + 2\,h_2 + 4\,h_1}{8\,\tau} \text{ usw.}$$

$$35b) \quad b \cong \frac{h_2 - 2\,h_1}{2\,\tau^2} \cong \frac{h_3 - 3\,h_1}{6\,\tau^2} \cong \frac{9\,h_4 + 4\,h_3 - 6\,h_2 - 36\,h_1}{120\,\tau^2} \text{ u. s. f.}$$

In der Praxis genügen in den allermeisten Fällen zwei Beobachtungen in umso grösseren, 5 bis 10 Minuten dauernden Intervallen, je kräftiger die Ergiebigkeit des Brunnens ist; und auch in diesen Fällen brauchen wir nur den Wert von a zu bestimmen, weil dessen Bedeutung wichtig ist.

Übrigens zeigen die zweiten Differenzen der Wasserstände, welche in gleichen Zeitunterschieden beobachtet wurden, ob die Steigung nach einem vollständigen oder zusammengesetzten parabolischen Gesetze erfolgt; denn im ersteren Fall müssen alle zweiten Differenzen gleich, in letzterem Fall gruppenweise verschieden ausfallen. Denn aus Gl. 31 ergibt sich die erste Differenz

$$d\,h = (a - 2\,b\,t)\,d\,t$$ und die zweite Differenz

$$d^2\,h = -2\,b\,.\,d\,t^2.$$

Demnach ist die Verzögerung des Steigens des Wasserstandes:

$$36a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{d^2\,h}{d\,t^2} = -2\,b = \text{Konstante}.$$

Ähnlich ist die Geschwindigkeit v, mit welcher der Wasserstand steigt, bei einfachem genau parabolischem Aufsteigen:

$$36b) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad v = \frac{d\,h}{d\,t} = a - 2\,b\,t,$$ welche nun schon linear proportional mit Zunahme der Zeit abnimmt. Ist $t = o$, so wird die Geschwindigkeit

der Wasserstandszunahme $\frac{dh}{dt}_{t=o} = a$, woraus die Bedeutung dieser charakteristischen Konstanten klar wird. Multiplizieren wir diese Grösse mit der Brunnenweite F, so erhalten wir die Zuflussstärke Q_0 des Brunnens bei dementsprechend tiefem Wasserstande

36 c) . . . . $Q_0 = F\,a$. Diese Zuflussstärke kann eventuell mittels einer Pumpe direkt gemessen werden, die genau soviel hebt, als bei dementsprechendem Wasserstande zufliesst. Wenn dies aber aus irgendwelcher Ursache nicht möglich ist, so können wir durch zwei Beobachtungen mit Hilfe der Gl. 35a darauf rechnungsweise folgern. Behufs Klarstellung der Anwendung der obigen Formeln mögen hier einige Beispiele dienen:

1. Beispiel: Der Brunnen zu P. konnte mittels des vorhandenen Ejektors nur bis zu einem 7 m tief liegenden Wasserspiegel ausgepumpt werden. Dieser Wasserspiegel blieb während weiterem Pumpen konstant. Während folgender Ruhepause stieg der Wasserstand und zwar während 13 Minuten 1,0 m höher und während den folgenden 13 Minuten noch um 0,53 m höher. Der Durchmesser des zylindrischen Brunnenschachtes war 2 m. Frage: Wie gross war die Leistung des Ejektors, welche natürlich mit der Zuflussstärke bei dem erwähnten stagnierenden Wasserstande gleich war?

Demnach war $\tau = 13$, $h_1 = 1{,}0$, $h_2 = 1{,}53$; ferner war die Brunnenweite $F = \frac{2^2 \pi}{4} = 3{,}14\ m^2$.
Nun gibt Gl. 35a und b die Zuflussstärke

$$Q_0 = F\,a \geqq F\,\frac{4\,h_1 - h_2}{2\,\tau} = 3{,}14\,\frac{4 \times 1{,}0 - 1{,}53}{2 \times 13} = 3{,}14 \times 0{,}095 = 0{,}298\ m^3 : \text{min.}$$

2. Beispiel: Ein Brunnen in T., dessen Tiefe 14,5 m und dessen Weite $F = 7{,}07\ m^2$ ist, wurde ausgepumpt. Während der folgenden Ruhepause stieg der Wasserspiegel im Brunnen in folgender Weise. Es war:

Beobachtungszeit	$t =$	0	.	10	.	20	.	30	.	40	.	50	.	60	Min.
Zeitunterschied	$\tau =$	.	10	.	10	.	10	.	10	.	10	.	10	.	„
Wasserstand	$h =$	0	.	0,16	.	0,31	.	0,36	.	0,41	.	0,46	.	0,50	m
1. Differenz	$\Delta h =$	.	0,16	.	0,15	.	0,05	.	0,05	.	0,05	.	0,04	.	„
2. „	$\Delta^2 h =$	.	.	−0,01	.	−0,10	.	0	.	0	.	−0,01	.	.	„

Es ist ersichtlich, dass die zweite Differenz der Steigung des Wasserstandes nur bis zur Höhe $h = 0{,}31$ nahezu konstant ist, dann stark differiert und hernach sogar die erste Differenz konstant, daher die zweiten Differenzen Null werden, was auf gleichmäfsiges Zufliessen des Wassers weist. Die Schaulinie dieser Bewegung wird also aus zwei Parabelstücken zusammengesetzt sein, von denen der obere Teil nahezu in eine Gerade ausläuft. — Nun konnte ich bei diesem Brunnen die Ursache finden, warum die zweite Differenz bei Wasserstand $h = 0{,}31$ so stark gegen die bei höheren abweicht. Der Brunnenschacht nämlich ist ungefähr in der Tiefe von 12—14,5 m enger. Seine Weite beträgt dort nur $5{,}72\ m^2$. Man muss daher, wenn die Frage gestellt wird, wieviel die Zuflussstärke bei tiefstem Wasserstande ist, diese Weite in Rechnung ziehen. Bemerkt man dies nicht, so besteht noch immer die Gl. 31, welche das Gesetz der Näherungsparabel darstellt. Jedoch fehlt man bei Anwendung der Gl. 36c bei Berechnung des Brunnenzuflusses am tiefsten Niveau, wenn man für F einen nicht entsprechenden Wert in Rechnung zieht. Die letzerwähnte Formel ist also nur so anzuwenden, wenn man bestimmt überzeugt ist, dass die Brunnenweite dort, wo die Wassersäule steht, bei welcher man den Zufluss bestimmen soll, nicht durch etwaige Unregelmäfsigkeiten von der Zylinderform abweicht. Auch bei Brunnenschächten, deren Wandung nicht wasserdicht ist, ist dieselbe nicht anwendbar.



Aus Gl. 36b folgt nun, dass die Geschwindigkeit des Aufsteigens des Wasserspiegels $v = a - 2\,b\,t$ ist.

Aus Gl. 31 aber ist die Zeit des Steigens $t = \frac{a}{2\,b} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2\,b}\right)^2 - \frac{h}{b}}$. Dieser Wert in die vorige Gleichung eingesetzt, gibt nach Quadrieren beider Seiten:

37a) . . . . . $v^2 = a^2 - 4\,b\,h$ und ebenso für den h_1 hohen Wasserstand

37b) . . . . . $v_1^2 = a^2 - 4\,b\,h_1$, ferner für den h_2 hohen Wasserstand

37c) . . . . . $v_2^2 - a^2 - 4\,b\,h_2$. Wenn wir weiter die entsprechenden Seiten der Gl. 37b von denen der Gl. 37a abziehen, so wird $v^2 - v_1^2 = 4\,b\,(h_1 - h)$. Ebenso sind die entsprechenden Seiten der Gl. 37c von denen der Gl. 37b abzuziehen, womit $v_1^2 - v_2^2 = 4\,b\,(h_2 - h_1)$. Eliminieren wir nun von letzteren beiden Gleichungen die Konstante b, so erhalten wir:

37d) . . . . . $v^2 - v_1^2 = \frac{h_1 - h}{h_2 - h_1}(v_1^2 - v_2^2)$. Durch Multiplikation aller Glieder dieser Gleichung mit dem Quadrate der Brunnenweite F unter Beachtung, dass die Zuflussstärke bei h hohem Wasserstande: $Q = F\,v$ und so ähnlich $Q_1 = F\,v_1$, $Q_2 = F\,v_2$ ist, erhalten wir schliesslich die allgemeine Formel zur Bestimmung der Zuflussstärke bei beliebigem h hohem Wasserstande, welcher direkt nicht gemessen werden kann, bestimmt durch zwei an zugänglichen Wasserständen direkt beobachteten Zuflussstärken; welche Formel lautet:

38) . . . . . $$Q = \sqrt{\frac{h_1 - h}{h_2 - h_1}(Q_1^2 - Q_2^2) + Q_1^2}.$$

Diese Formel ist für jeden Brunnen von beliebig unregelmäſsiger Weite gültig, wenn der Zufluss mit wachsendem Wasserstande allmählich schwächer wird oder auch gleichmäſsig bleibt; ist also nicht nur gültig, wenn der Zufluss von der Tiefe, sondern auch, wenn derselbe von oben erfolgt. Im letzteren speziellen Fall bildet (vorausgesetzt, dass der Brunnenschacht oder das Rohr genau zylindrisch ist) die Schaulinie der Grundgleichung 31 eine grade Linie, welche als eine Parabel angesehen werden kann, deren Scheitel im Unendlichen liegt. In Gl. 31 wird dann $h_m = \infty$ für $t = \infty$ und Gl. 38 gibt dann $Q_1 = Q_2$, daher auch $Q = Q_1$, das heisst: die Zuflussstärke ist bei jedem Wasserstande dann die gleiche.

Das direkte Messen der Zuflussstärken oder die rechnerische Bestimmung nach dem Messen der Wasserstände an z w e i Stellen ist überhaupt bei Bohrbrunnen sehr umständlich und sogar schwierig. Daher es zweckmäſsiger ist, den Zufluss nur in e i n e m Niveau versuchsweise zu bestimmen, und statt des anderen die Höhenlage h_m des höchst erreichbaren Wasserspiegels zu nehmen, allwo die Zuflussstärke Null ist. Setzen wir also dann in die Gl. 43 für $h_2 = h_m$ und für $Q_2 = 0$ ein und bezeichnen das folgende Produkt der beobachteten Grössen mit

39) . . . . $c = \frac{Q_1}{\sqrt{h_m - h_1}}$, so ergibt die erwähnte Gleichung die einfache Formel zur Bestimmung der Zuflussstärke bei beliebig hohem Wasserstande:

40) . . . . $$Q = c\,\sqrt{h_m - h}$$

$h_m - h$ ist die Absenktiefe (Depression) des Wasserspiegels. Die letztere Formel lautet demnach in Worten:

D i e E r g i e b i g k e i t d e s B r u n n e n s i s t d e r Q u a d r a t w u r z e l d e r A b s e n k t i e f e d e s W a s s e r s p i e g e l s d i r e k t p r o p o r t i o n a l, o d e r d i e



Ergiebigkeiten eines Brunnens bei verschiedenen Wasserständen verhalten sich zu einander wie die Quadratwurzeln der Absenktiefen des Wasserspiegels.

Die charakteristische Konstante c des Brunnens bedeutet die Ergiebigkeit desselben, wenn die Absenktiefe $h_m - h = 1$ Meter beträgt. Es ist bemerkenswert, dass sowohl in Formel 40 als auch in Gl. 38 die Brunnenweite nicht vorkommt, demnach es bei Anwendung derselben gleichgültig ist, welche unregelmäfsige Form oder verschiedene Weiten der Brunnenschacht haben mag, natürlich vorausgesetzt, dass die Quellenstärke die gleiche bleibt.

IX. Repulsivdruck der Luft und die erforderliche Druckluftmenge.

Befindet sich Luft im absolutem Ruhezustande, so müssen sowohl die äusseren auf sie wirkenden Niveaupressungen und Kräfte untereinander, als auch die Kräfte zwischen ihren Molekülen mit ersteren im Gleichgewicht sein. Wenn hingegen die ersteren Kräfte ungleich sind, so bewegt sich die in Flüssigkeit getauchte Luft unter Veränderung ihrer Dichte, je nachdem ihre Molekularkräfte grösser oder geringer sind, als die äusseren Pressungen. Wir nennen den intramolekularen Druck p im Gegensatz zum äusseren entgegengesetzten Niveaudruck p′ den Repulsivdruck, beide auf die Flächeneinheit bezogen. Nun ist nach dem physikalischen Gesetze von Mariotte und Gay-Lussac: $G R T = V p$, worin G kg-Gewicht der in der Sekunde strömenden Luft, deren Volumen $V\ m^3$: Sek. und deren Repulsivdruck $p\ kg : m^2$ ist. Die Konstante R ist für nasse atmosphärische Luft gleich 29,38 und T ist die absolute Temperatur der Luft im entsprechenden Momente. Nachdem aber im Beharrungszustande die Luftstromstärke G konstant sein muss, wenn noch $V_0\, p_0$ Volumen und Druck der atmosphärischen Luft vor der Verdichtung, T_0 ihre absolute Temperatur und $V_r\, p_r\, T_r$ die ähnlichen Grössen für die im Rezipienten befindliche verdichtete Luft, ferner $V_1\, p_1\, T_1$ ähnliche Grössen für die bei der Luftrohrmündung in der Sekunde ins Brunnenwasser einströmende Luft bezeichnen, so wird im Beharrungszustande sein:

$$41) \quad \ldots\ldots \quad GR = \frac{V_0\, p_0}{T_0} = \frac{V_r\, p_r}{T_r} = \frac{V_1\, p_1}{T_1} = \frac{V p}{T}.$$

In dieser vierfachen Gleichung kommen die drei Unbekannten V_1 V_r und p_1 vor; die übrigen Veränderlichen können entweder gemessen oder beobachtet werden. Aber auch V_1 ist indirekt gegeben, wenn die erforderliche Wassermenge Q_1 gegeben, oder bei Versuchen gemessen worden ist. Denn bei Ermöglichung der kugelförmigen Luftblasenbildung nahe zur Luftrohrmündung durch geeignete Konstruktionen, wie in Abb. 5, 7, 8, 9, folgt, dass

$$42a) \quad \ldots\ldots\ldots \quad V_1 = \frac{1}{\lambda} Q_1.$$ Hiermit haben wir aber aus Gl. 41 bestimmt, dass der Repulsivdruck bei der Luftrohrmündung, mit welcher die eintretende Luft den Niveaudruck p_1' des Wassers überwindet

$$42b) \quad \ldots\ldots\ldots \quad p_1 = \lambda \frac{V_0\, p_0}{T_0} \frac{T_1}{Q_1}$$ ist. Dieser Druck ist also desto

grösser, je grösser die Luftstromstärke, die durch die Luftpumpe geliefert wird, — je kleiner die emporgetriebene Wassermenge und je niedriger die Temperatur der Luft vor der Verdichtung und je höher die Brunnentemperatur ist, oder je unvollständiger abgekühlt die Luft ins Wasser mündet.

Wir können aber den Repulsivdruck der einmündenden Luft noch anders ausdrücken. Denn wenn im allgemeinen durch eine Mündung, deren Flächenweite f misst, in der Zeiteinheit die Masse von $m = \frac{G}{g}$ Luft mit Geschwindigkeit u unter spezifischen Niveaudruck p' und durch spezifischen Repulsivdruck p hindurchgeht: so wird, weil ihre Beschleunigung mit ihrer Geschwindigkeit bei Ausfluss gleich ist[1]), ihr Massendruck $mu = G\frac{u}{g}$ mit Beachtung der Gl. 22 auch gleich $fu\frac{\gamma}{g}$ und gleich der Resultante der inneren und äusseren Kräfte sein. Diese ist aber $f(p-p')$ (für Luft gültig nur in dem Falle, wenn p und p' von einander nur gering verschieden sind). Somit ist dann

43a) . . . . $\frac{Gu}{g} = f\gamma\frac{u^2}{g} = f(p-p')$. Durch Verbindung der Gl. 21 und 41 folgt aber, dass:

43b) . . . . . . $V\gamma = V_0\gamma_0 = \frac{Vp}{RT} = \frac{V_0 p_0}{RT_0}$. Somit ist das spezifische Gewicht der Luft $\gamma = \frac{p}{RT}$, was in Gl. 43a eingesetzt gibt, dass die kinetische Energie der ausströmenden Luft unter geringer Druckdifferenz:

43c) . . . . . . $\frac{u^2}{2g} = RT\frac{\varphi^2}{2}\left(1-\frac{p'}{p}\right)$ ist, in welcher φ einen entsprechenden Einschnürungs- und Widerstandskoeffizienten bedeutet. Dieser ist für Flüssigkeiten inkompessibler Natur, wenn der Durchmesser des Rohres d und der der Ausmündung d_1 ist, auch von einem Widerstandskoeffizienten α abhängig, welcher von allen molekularen und äusserlichen Bahnwiderständen abhängig ist. Somit können wir nach Heinemann[2]) setzen:

44) . . . . . $\varphi^2 = \frac{2\alpha^2}{2-\left(\frac{d_1}{d}\right)^4\alpha^2} = \frac{2}{1+\zeta}$ worin ζ die Summe aller Widerstandskoeffizienten, welche von der Rohrleitungsform herrühren, nach Weisbachs Methode bezeichnet. Nun ergibt sich aus letzterer Gleichung, dass der Koeffizient des Bahnwiderstandes

45a) . . . . $\alpha^2 = \frac{2}{1+\zeta+\left(\frac{d_1}{d}\right)^4}$ bedeutet.

Nach Grashof und andern (Lorenz, Gutermuth) soll auch der Luftwiderstand direkt proportional zur Länge l des Rohres und umgekehrt proportional zum Durchmesser desselben sich ändern. So ist dann im allgemeinen $\zeta = \frac{\mu l}{d}$ worin μ ein entsprechender Widerstandskoeffizient, l die Länge, d der Durchmesser

[1]) Vergl. Heinemann, Rationaltheorie der Bewegung des Wassers etc. Hagen 1872, § 44.
[2]) Hydrodynamik. Hagen 1872, § 52 und 95.



des Rohres in Metern bedeuten. Grashof[1]) gibt für Druckluft senkrecht leitende Rohre (die kinetische Energie zu Anfang mit $H = \frac{u_r^2}{2g}$ und am Ende mit $H_0 = \frac{u_1^2}{2g}$ bezeichnend, wenn noch $\mu_1 = 0{,}0205$ ein Koeffizient $R = 29{,}38$ für nasse Luft ist) in dieser Form: $\frac{H_0}{H} = 1 - \frac{2\mu_1 l H_0}{RTd}$.

Aber weil die abs. Temperatur der Luft im Rohr zwischen 273 bis 300 Graden vorkommen kann, können wir einfach setzen:

$$\mu = \frac{2\mu_1}{RT} = \frac{2 \times 0{,}0205}{29{,}38\,T} = 4{,}56 \times 10^{-6} \text{ bis } 5{,}2 \times 10^{-6}.$$

Nun ergibt sich aus letzterer Formel $1 - \frac{H_0}{H} - \frac{\mu l}{d} H_0 = \zeta H_0$ oder durch Multiplikation aller Glieder mit $\frac{H}{H_0}$ folgt

$$\frac{H - H_0}{H_0} = \zeta H = \mu \frac{l}{d} \frac{u_r^2}{2g}.$$

Wenn z. B. $l = 100$ m, $d = 0{,}020$ m wäre, so wäre etwa im Mittel $\zeta = 0{,}024$. Wäre hingegen im andern äussersten Fall $l = 10$ m, $d = 0{,}020$ m, so wäre etwa dann im Mittel $\zeta = 0{,}00248$; also immer eine Zahl zwischen Null und Eins. Daher kann für überschlägige Rechnungen in Gl. 44 $\zeta \cong 0{,}014$ gesetzt oder $\varphi \cong \frac{2}{1{,}014}$ gesetzt werden.

In langen und noch so engen Rohrleitungen kann die Rohrwand der durchziehenden Luft einen Widerstand, in gewöhnlichem Sinne verstanden, so wie beim Durchfliessen unelastischer Flüssigkeiten, nicht entgegensetzen, sondern die Reibung der Luft an der Rohrwand verwandelt deren Temperatur, Repulsivdruck und Dichte, indem deren innerer Wärmgehalt gesteigert wird, wenn die Wandung die Wärme nicht abzuleiten vermag. Hingegen wird im entgegengesetzten Fall der Wärmegehalt der Luft vermindert.

Aus Gleichung 43c folgt, dass die kinetische Energie der Gewichtseinheit Luft an der Luftrohrmündung:

45a) . . . . . . $\frac{u_1^2}{2g} = RT_1 \frac{\varphi^2}{2}\left(1 - \frac{p_1'}{p_1}\right)$ ist. Wir stellen die konstruktive Bedingnis, dass die von der Luftrohrmündung austretende Luftmenge $f_1 u_1$ unweit die ganze Weite des Steigrohres einnehme, wie in Abb. 5 u. 6, allwo die Weite F und die Luftgeschwindigkeit U_1 ist. Obwohl nun auch Niveaudruck und Repulsivdruck unweit der Rohrmündung im Steigrohr sich etwas vermindern, so können wir doch annehmen, dass die Verhältniszahl $\frac{p_1'}{p_1}$ sehr unbedeutend sich dort ändert. Somit erfolgt zuvörderst, Gl. 28 mitbeachtend, dass wenn wir zur Unterscheidung von der allfälligen Zuflussstärke Q die beschleunigte Wassermenge mit Q_1 bezeichnen: $U_1 = \frac{f_1}{F} u_1 = \frac{1+\lambda}{\lambda} \frac{Q_1}{F}$ und somit ist

45b) . . . . . $\frac{u_1^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{Q_1}{f_1}\right)^2$. Diesen Wert in Gl. 45a

[1]) Theoretische Maschinenlehre, 1. Bd., § 107.

eingesetzt und den Wert von p_1 daraus entwickelt gibt, wenn wir die Koeffizientengruppen so bezeichnen, $\varphi^2 g R T_1 = u^2_n$, und $\frac{1+\lambda}{\lambda u_n} = \sigma$:

46a) . . . . $p_1 = \frac{p'_1}{1-\left(\frac{u_1}{u_n}\right)^2} = \frac{p_1'}{1-\left(\sigma\frac{Q_1}{f_1}\right)^2}$. Der spezifische Druck p'_1 auf das Niveau der Luftrohrmündung ist aber nichts anderes als der Druck der Wassersäule im Brunnen vermehrt mit dem Druck der Atmosphäre. Letztere ist:

46b) . . . . $p'_0 = 10\,\varrho$ und demnach die erstere:

46c) . . . $p'_1 = (h+10)\varrho = \left[h_m + 10 - \left(\frac{Q}{c}\right)^2\right]\varrho$, nachdem wir den effektiven Wasserstand nach Gl. 40 als Funktion der Brunnenergiebigkeit einsetzten. Setzen wir den Wert von Q_1 nach Gl. 42a in Gl. 46a ein, so folgt zuvörderst, dass $p_1 - p'_1 = \left(\frac{\sigma\lambda V_1}{f_1}\right)^2 p_1$. Wenn wir aus Gl. 41 $V_1 = \frac{V_0 p_0}{p_1}\frac{T_1}{T_0}$ einsetzen und $\sigma\lambda p_0 \frac{T_1}{T_0} = K_0$ bezeichnen, so folgt weiter die quadratische Gleichung

47a) . . . . $p_1^2 - p'_1 p_1 = \left(\frac{K_0 V_0}{f_1}\right)^2$, woraus

47b) . . . $p_1 = +\frac{p'_1}{2}\left[1+\sqrt{1+4\left(\frac{K_0 V_0}{f_1 p'_1}\right)^2}\right]$. Für 15gradige Brunnentemperatur und die gleiche Temperatur der Aussenluft, also wenn $T_1 = T_0 = 288$ für zylindrische Luftrohrmündungen, wenn also $\varphi \cong \sqrt{2}$, $u_n = \varphi\sqrt{g R T_1} = \sqrt{2 \times 9{,}81 \times 29{,}38 \times 288} = 407{,}4$ und $\sigma = \frac{1+\lambda}{\lambda_1 u_n} = \frac{1{,}6}{0{,}6}\frac{1}{407{,}4} = 0{,}0065$, ist folglich $K_0 = \sigma\lambda p_0 \frac{T_1}{T_0} = 0{,}0065 \times 0{,}6 \times 10^4 = 39{,}27$.

Die Formel 47b gibt den Repulsivdruck der Luft an der Luftrohrmündung als abhängige veränderliche Grösse von der Raummenge der zu verdichtenden Luft atmosphärischer Pressung und der Mündungsweite des Luftrohres an.

Man ersieht daraus, nach welchem Gesetze der Druck p_1 umso geringer ausfallen kann je weiter die Mündung des Luftrohres f_1 gemacht wird. Somit kann man an Kompressionsarbeit der Luftpumpe ersparen, wenn man eine Konstruktion findet, bei welcher diese Mündungsweite gross ist Dieser Umstand scheint auch die Ursache zu sein, dass die Mammutpumpe (Abb. 8) wirtschaftlicher arbeitet, als unter ähnlichen Verhältnissen angewendete andere Systeme, wie dies Josses Versuche bewiesen haben. Bei diesem System bildet nämlich f_1 nicht die eigentliche Mündung des Luftrohres, denn dieses mündet in ein der Taucherglocke ähnlich umgestülptes Gehäuse; sondern f_1 wird gebildet durch den an der untern Mündung des Steigrohres ringförmig sich mit Luft erfüllenden Raum, wie dies aus der Abbildung ersichtlich ist Die Grösse dieser ringförmigen Mündungsweite ist wohl durch Rechnung unbestimmbar, doch kann auf Grund von Versuchen auf die Weite derselben einst gefolgert werden.

Nach Eliminieren von p_1 aus Formeln 46a und 47b folgt zuvörderst, dass:

$$\frac{2}{1-\left(\frac{\sigma Q_1}{f_1}\right)^2} = 1+\sqrt{1+4\left(\frac{K_0 V_0}{f_1 p'_1}\right)^2}$$ und hieraus ergibt

sich, dass die hebbare Wassermenge bei einem der Brunnenwassersäulenhöhe h_s entsprechendem Niveaudruck p'_1 auf die Einströmmündung des Luftrohres

$$48) \quad \therefore \quad Q_1 = \frac{f_1}{\sigma} \sqrt{1 - \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4\left(\frac{K_0 V_0}{f_1 p'_1}\right)^2}}} \text{ momentan sein kann.}$$

Diese Formel lehrt, dass zum Beispiel bei Beginn des Betriebes, wenn eben der Wasserstand im Brunnen am höchsten ist und demnach $p'_1 = (h_m + 10)\,\varrho$ ist, auch die emporbeschleunigte Wassermenge Q_1 am kleinsten ist. Kann diese Menge über die Ausflusshöhe kommen und wegfliessen, so nimmt der Wasserstand im Brunnen ab, wodurch in der nächsten Sekunde p'_1 schon kleiner und somit die beschleunigte Wassermenge Q_1 grösser wird. Dies geht so fort, bis der Beharrungszustand eintritt, bei welchem Q_1 und Q Brunnenzuflussstärke so zugenommen haben, dass beide bei einem bestimmten Wasserstande h_s gleich werden. Bezeichnen wir diese Zuflussstärke im Beharrungszustande mit Q_s, so ist dann der Niveaudruck des Wasserstandes nach Gl. 46c in Wassersäulenmafs

$$49) \quad \ldots\ldots \quad \frac{p'_1}{\varrho} = h_m + 10 - \left(\frac{Q_s}{c}\right)^2.$$

Wenn wir nun den Wert von p'_1 in Gl. 48 einsetzen und $Q_1 = Q_s$ setzen, so führt dies zu einer Gleichung vierten Grades. Behufs Erleichterung des Rechnungsganges setzen wir vorübergehend $\frac{K_0 V_0}{f_1 p'_1} = y$ und $\frac{\sigma Q_1}{f_1} = x$. Dann ist Gl. 48 von der Form:

$$x = \sqrt{1 - \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4y^2}}}.$$

Erheben wir beide Seiten aufs Quadrat und schaffen die Brüche weg, so folgt zuvörderst, dass $(1 - x^2)(1 + \sqrt{1 + 4y^2}) = 2$. Beide Seiten durch $1 + x^2$ dividiert, 1 beiderseits abgezogen, und dann beide Seiten zum Quadrat erhoben gibt

$$1 + 4y^2 = \left(\frac{2}{1 - x^2} - 1\right)^2 = \left(\frac{1 + x^2}{1 - x^2}\right)^2, \text{ woraus } 4y^2 = \frac{4x^2}{(1 - x^2)^2}$$

und somit durch einfaches Ausziehen der Quadratwurzel $y = \frac{x}{1 - x^2}$. Setzen wir nun die Werte von x und y wieder ein, so folgt, dass die erforderliche Luftmenge, die in der Sek. verdichtet werden muss, damit Q_s Wassermenge beharrlich gehoben werden könne:

$$50) \quad \ldots\ldots \quad V_0 = \frac{f_1 p'_1}{K_0} \frac{\frac{\sigma Q_s}{f_1}}{1 - \left(\frac{\sigma Q_s}{f_1}\right)^2},$$

und nun können wir aus Gl. 49 den Wert von p'_1 einsetzen. Wir erhalten schliesslich die erforderliche Luftmenge:

$$51) \quad \ldots\ldots \quad V_0 = \frac{\sigma \varrho}{K_0} \frac{h_m + 10 - \frac{1}{c^2} Q_s^2}{1 - \left(\frac{\sigma}{f_1}\right)^2 Q_s^2} Q_s.$$

Für beliebige Luftrohrmündungen hat die Koeffizientengruppe den Wert:

$$\frac{\sigma \varrho}{K_0} = \frac{\varrho T_0}{\lambda p_0 T_1} = \frac{1000}{0{,}6 \times 10^4} = \frac{1}{10\lambda} \frac{T_0}{T_1}.$$

Wir können auch nach Gl. 46 c den Niveaudruck durch den effektiven Wasserstand ausdrücken und dann ergibt sich aus Gl 51: $V_0 = \frac{T_0}{10\,\lambda\,T_1}\,\frac{(h_s+10)}{1-\left(\frac{\sigma}{f_1}\right)^2 Q_s^2}\,Q_s.$

Und nach Gl. 40 den Wert von Q_s als Funktion des Brunnenwasserstandes ersetzt, gibt das Verhältnis der zu jedem Kubikmeter gehobenen Wassers erforderlichen atmosphärischen Luftmenge:

$$52) \quad \frac{V_0}{Q_s} = \frac{1}{\lambda}\frac{T_0}{T_1}\frac{h_s+10}{10}\,\frac{1}{1-\left(\frac{\sigma}{f_1}\right)^2 c^2 (h_m - h_s)}.$$

Diese ist die Hauptformel, womit die geringste erforderliche Luftmenge bei einem bestimmten Brunnen, von welchem man die gegebene Wassermenge Q_s zu heben wünscht, berechnet werden kann. Die Gleichung 51 lässt auch denselben Zweck direkter erreichen, aber Gl. 52 lässt sich leicht zu einer Näherungsformel verändern, welche etwas kleinere, aber umso annähernd richtigere Resultate liefert, je geringer die Ergiebigkeit des Brunnens und je grösser die Mündungsweite des Luftrohrs ist. Es kann nämlich im Nenner der Bruchzahl an der rechten Seite der Formel das Produkt, dessen Faktoren σ und c bilden, als sehr klein gegen 1 vernachlässigt werden, und wir erhalten den annähernden Grenzwert:

$$53) \quad \frac{V_0}{Q_s} \cong \frac{1}{\lambda}\frac{T_0}{T_1}\frac{h_s+10}{10};$$

für gleiche Temperaturen der Aussenluft und des Brunnenwassers, also wenn $T_0 = T_1$ und wenn $\lambda = 0{,}6$ sind, folgt hiermit, dass, um je 1 m³ Wasser zu heben, näherungsweise folgende Mengen atmosphärischer Luft zu verdichten sind: und zwar wenn der Wasserstand im Brunnen

$h_s =$	10	20	30	40	50	60 m	hoch ist,
wird $\frac{V_0}{Q_s} \gtrsim$	3,33	5,0	6,67	8,33	10,0	13,33 m³.	

Diese Grenzwerte können mit den wirklichen Versuchsergebnissen nur bei solchen Brunnen annähernd übereinstimmen, bei welchen der höchste Wasserstand niedriger als die Ausflusshöhe ist. Wenn hingegen $h_m > H_i$ ist, so gibt der Brunnen auch ohne Lufteinblasen Wasser, weshalb der Versuch natürlich weniger Luftverbrauch für je einen Kubikmeter gehobenen Wassers aufweist als im ersteren Fall. Im letzteren Fall kann man die erforderliche Druckluftmenge folgenderweise bestimmen: — Es ist offenbar, dass von den bei h_s hohem Wasserstande zufliessenden Q_s mit der Druckluftmenge V_1 nur ein bestimmter Teil $Q_x = \lambda V_1$ gehoben werden muss, denn der andere Teil Q_i steigt ja ohnedem von selbst über die Ausflusshöhe H_i. Der erste Teil ist nach Gl. 53 und 40 gleichsam, wenn der höchste Wasserstand H_s hoch wäre: $Q_x = \frac{10\,\lambda}{h_s+10}\frac{T_1}{T_0}V_0 = c\sqrt{H_s - h_s}$ und der andere Teil: $Q_i = c\sqrt{h_m - H_s}$, sodass die gesamte gehobene Wassermenge $Q_s = Q_x + Q_i = c\sqrt{h_m - h_s}$ ist. Hieraus folgt, dass durch Druckluft eigentlich nur

$$54\,a) \quad Q_x = Q_s - Q_i = Q_s\left(1 - \frac{Q_i}{Q_s}\right) = Q_s\left\{1 - \sqrt{\frac{h_m - H_s}{h_m - h_s}}\right\}$$

Wassermenge gehoben werden muss. Somit muss in Gl. 52 statt Q_s der letztere Wert von Q_x eingesetzt werden, damit sie für besprochenen Spezialfall gültig erscheine. Ebenso lautet dann die Näherungsformel 53:

54 b) . . . . $\frac{V_0}{Q_s} \gtrsim \frac{1}{\lambda}\frac{T_0}{T_1}\frac{h_s+10}{10}\left(1-\sqrt{\frac{h_m-H_s}{h_m-h_s}}\right)$, dessen Wert in die der Gl. 53 übergeht, wenn zufällig $h_m = H_s$; hingegen wird derselbe imaginär, wenn $H_s > h_m$, weshalb die Formel dann ihre Gültigkeit verliert. — Es ist noch bemerkenswert, dass die Näherungsformen 53 und 54b auch direkt so abgeleitet werden können, wenn man die Repulsivdrucke der Luft gleich den entsprechenden Niveaudrucken in Rechnung zieht, was aber im allgemeinen nicht richtig ist, sondern nur in solchen Fällen zulässig ist, um angenäherte Resultate zu erhalten, wenn man es mit verhältnismäfsig geringer Inanspruchnahme der Brunnenergiebigkeit zu tun hat und die Mündungsweite des Luftrohres genügend gross ist; wenn also $h_m - h_s$ und dementsprechend auch Q_s möglichst klein sind, hingegen f_1 möglichst gross ist.

Die Gl. 52 eignet sich noch zu der folgenden interessanten Folgerung: Wenn wir darin die gehobene Wassermenge als Funktion des Brunnenwasserstandes nach Gl. 45 ausgedrückt einstellen, so ergibt sich die erforderliche Luftstromstärke:

55) . . . $V_0 = \frac{1}{\lambda}\frac{T_0}{T_1}\frac{h_s+10}{10}\,\frac{c\sqrt{h_m-h_s}}{1-\left(\frac{\sigma}{f_1}\right)^2 c^2 (h_m-h_s)}$ ganz im allgemeinen

für verschiedene Brunnenwasserstände, und speziell damit der tiefste Wasserstand, also der stärkste Zufluss erreicht werde, wenn nämlich $h_s = o$ wird, braucht man die Luftstromstärke:

56) . . . $h_s = o \qquad (V_0) = \frac{1}{\lambda}\frac{T_0}{T_1}\,\frac{c\sqrt{h_m}}{1-\left(\frac{\sigma}{f_1}\right)^2 c^2 h_m}$.

Auch diese erforderliche Luftstromstärke wird, wie aus der Formel ersichtlich ist, desto grösser ausfallen, je kleiner die Luftrohreinmündung und je grösser die anfängliche Eintauchtiefe des Luftrohres vom höchsten Wasserstand gemessen ist. Die Luftstromstärke müsste sogar unendlich gross werden, wenn man nicht beachtet, dass $h_m < \left(\frac{f_1}{c\,\sigma}\right)^2$ sein muss Ist demnach die höchst erreichbare Verdichtungsspannung der Luft $\frac{h_k}{10}$ Atm., so muss, weil die rationellste Eintauchtiefe des Luftrohres $H_i = h_k + s_s$ werden soll, die Luftrohrmündungsweite der Bedingung entsprechen:

57) . . . . $f_1 > \sigma c \sqrt{h_k}$.

Nachdem die erforderliche Luftstromstärke mit Änderung des Brunnenwasserstandes und der beharrlich hebbaren Wassermenge nach Formeln 51 und 55 sich besonders eigentümlich ändert, möge der Verlauf des Änderungsgesetzes in einem Beispiel hier gezeigt und graphisch veranschaulicht werden:

Beispiel: Beim artesischen Brunnen in R. ist die Eintauchtiefe des 85 m langen Luftrohres vom Ausflussniveau gemessen $H_l = 75$ m. Der Wasserspiegel im Brunnen liegt vor Beginn des Druckluftbetriebes $s_m = 15{,}0$ m tief, der innere Durchmesser des Luftrohres gleich dem der Mündung $d = d_1 = 0{,}052$ m. Die Tiefe eines beobachteten abgesenkten Wasserstandes $s_1 = 45$ m, bei welchem die Zuflussstärke des Brunnens $60^2 Q_1 = 30{,}5$ m³: stündlich. Abs. Brunnentemperatur $T_1 = 288^0$, Lufttemperatur abs. äussere $T_0 = 293^0$. Beobachtete Luftspannung im Luftkessel zu Beginn $\frac{h_m}{10} = 6$ Atm.[1])

[1]) Dieser Brunnen ist einer der Ausnahmen, welcher nicht intermittierend Wasser gibt, wohl aber unter Anschwellung und Verminderung der Ausflussgeschwindigkeit betrieben wird, weil zufällig die Dimensionierung der Rohre, nach Pohle's System eingerichtet, der verhältnismäfsig grossen Ergiebigkeit des Brunnens entspricht.



Frage: Wie gross muss die Luftstromstärke werden, damit beharrlich bei verschiedenen Wasserständen die entsprechenden Wassermengen gehoben werden können?

Berechnung. Die charakteristische Ergiebigkeitszahl des Brunnens ist nach Gl. 39, indem $h_m = H_i - s_m = 60$ und $h_1 = s_1 - s_m = 45 - 15 = 30$ sind

$$c = \frac{Q_1}{\sqrt{h_m - h_1}} = \frac{30{,}5}{60^2 \sqrt{60-30}} = 0{,}001547 \text{ m}^3 : \text{sec.}$$

Nun ist $\frac{d_1}{d} = 1$ $\mu = 4{,}7 \times 10^{-6}$ genommen folgt nach Gl. 45a:

$$\alpha^2 = \frac{2}{1 + \frac{\mu l}{d} + \left(\frac{d_1}{d}\right)^4} = \frac{2}{2 + \frac{4{,}7 \times 85}{5{,}2 \times 10^3}} = \frac{2}{2{,}0768} = 0{,}963.$$ Somit ist nach Gl. 44

$$\varphi = \sqrt{\frac{2\alpha^2}{2 - \alpha^2\left(\frac{d_1}{d}\right)^4}} = \sqrt{\frac{2 \times 0{,}963}{2 - 0{,}963}} = 1{,}383.$$

Daher $u_n = \varphi \sqrt{g R T_1} = 1{,}383 \sqrt{9{,}81 \times 29{,}38 \times 288} = 390{,}5.$

$$\sigma = \frac{1+\lambda}{\lambda \mu_n} = \frac{1{,}6}{0{,}6} \frac{1}{390{,}5} = 0{,}00683.$$

Die Luftrohrmündungsweite $f_1 = d_1^2 \frac{\pi}{4} = 0{,}052^2 \times \frac{3{,}14}{4} = 0{,}02123 \text{ m}^2$. Setzen wir

$$A_1 = \frac{1}{\lambda} \frac{T_0}{T_1} \frac{c}{10} = \frac{1}{0{,}6} \frac{293}{288} \frac{1{,}547}{10^4} = 0{,}0002623.$$

$$A_2 = \left(\frac{\sigma c}{f_1}\right)^2 = \left(\frac{6{,}83 \times 1{,}547}{2{,}123 \times 10^4}\right)^2 = 2{,}478 \times 10^{-7}.$$

Hiermit ist die erforderliche Luftstromstärke für diesen Brunnen nach Gl. 55:

$$58) \quad \ldots\ldots\ldots \quad V_0 A_1 = \frac{(h_s + 10)\sqrt{h_m - h_s}}{1 - A_2(h_m - h_s)}$$ und die hebbare Wassermenge nach Gl. 40: $Q_s = c\sqrt{h_m - h_s}$. In folgender Tabelle sind die nach diesen beiden Formeln berechneten Luftstromstärken und hebbaren Wassermengen bei verschiedenen Brunnenwasserständen zusammengestellt und dann wurde in Abb. 13 das Änderungsgesetz dieser Grössen als Funktionen der Brunnenwasserstände durch Schaulinien dargestellt.

Wasserstand h_s =	60	59	58	55	50	40	30	20	10	0	Meter
Hebbare Wassermenge $60^2 Q_s$ . .	0	5,57	7,88	11,10	17,6	24,8	30,5	35,2	39,4	43,1	m³ : Stunde
Erf. Luftmenge Atm. Pressung $60^2 V_0$.	0	65,17	90,8	122 3	179,2	211,2	206,9	179,2	133,6	73,2	„ „
Luftmenge für je 1 m³ Wasser $\frac{V_0}{Q_s}$	$\frac{0}{0}$	11,70	11,53	11,02	10.18	8,50	6,78	5,09	3,39	1,70	m³ : m³

Sowohl aus dieser tabellarischen Zusammenstellung als auch aus den Schaulinien ist zu ersehen, dass die erforderliche Druckluftmenge nur bis zu einem **Maximum** mit Verminderung des Wasserstandes zunimmt und dann mit weiterer Verminderung des Wasserstandes rapid geringer wird. Nachdem wir im Beharrungszustande den Betrieb bei konstant bleibendem Wasserstande fortsetzen, so folgt mit andern Worten, dass umsoweniger Druckluft erforderlich ist, je niedriger der Wasserstand unter denjenigen abgesenkt werden kann, bei welchem die maximale

Luftmenge erforderlich ist. Aus unserem Beispiel (Abb. 13) ist zu ersehen, dass bei der Tauchtiefe der Luftrohrmündung unter dem höchsten Wasserstande von $h_m = 60$ m dieser sogenannte metazentrische Wasserstand etwas geringer als 40 m, also weniger als $\frac{2}{3}$ h_m beträgt. Auch die geförderte Wassermenge nimmt mit zugeführter grösserer Luftmenge nur bis zu einem Maximum zu, weil der Wasserstand bis zum erwähnten metazentrischen Wasserstande hinabsinken kann; wie dies schon die Versuche von Josse zeigten, obwohl die Ursache aus diesen Versuchen nicht zu ergründen war. Aber nun taucht die Frage auf, wie man das machen soll, dass der Wasserstand nicht über der kritischen Höhe stehen bleiben soll, wo doch der Zufluss aus dem Brunnen relativ gering ist, und man doch viel Druckluft verbrauchen muss. Der ideale Zustand wäre nämlich der, dass der Wasserstand h_s bis nahezu Null sinken gemacht werden könnte, allwo man in unserem Beispiel zum Heben je einer Raummenge Wassers nur 1,7 Raummenge atmosphärischer Luft schwach zu verdichten brauchte.[1]) Nun wäre dies nur dann möglich, wenn

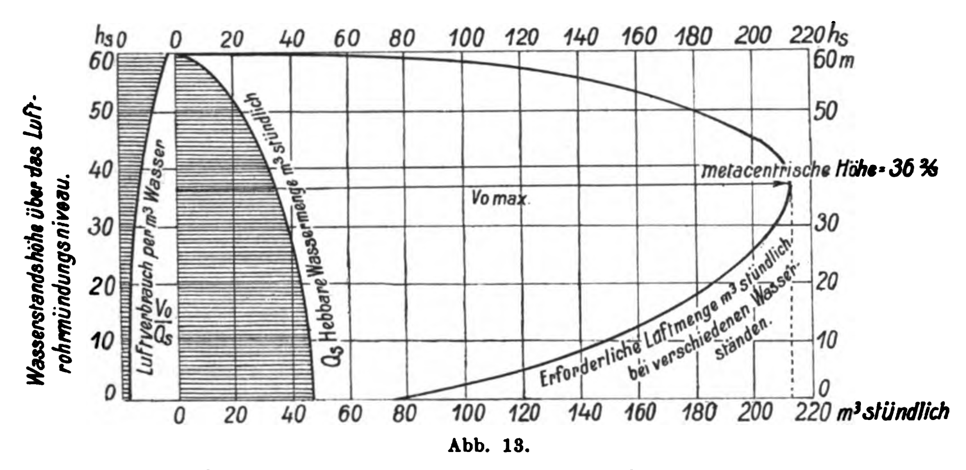


Abb. 13.

Schaulinien der beharrlich hebbaren Wassermengen bei verschiedenen Wasserständen und der dazu erforderlichen Druckluftmengen.

die Steighöhe H_s eine entsprechend geringe wäre, worüber die Formel 61 a nicht belehrt. Wir werden aber in folgendem Abschnitte sehen, dass die Steighöhe auch mit der Luftstromstärke sich direkt proportional ändert.

Es gehört also zu einer jeden Steighöhe nur ein bestimmter Wasserstand, der unabhängig von den Rohrdimensionen ist.

Nun haben wir graphisch in Abb. 13 gefunden, dass der Wasserstand, bei welchem die erforderliche Luftstromstärke ein Maximum wird, etwas weniger als $\frac{2}{3}$ h_m beträgt. Wir können nun diesen Wasserstand genauer analytisch aus Gl. 58 bestimmen, welche nur die vereinfachte Schreibweise der Gl. 55 ist.

[1]) Dies wollte eben das System von Starrett bezwecken. (Engineering News 1904, Vol. LII, No. 21; auch im Prinzip beschrieben in Dinglers Polyt. Journ., Jahrg. 1905.) Diese Erfindung versprach mit bloss 0,27 atm. Spannung Luft Wasser auf etwa 90 m Höhe zu heben, was auf den ersten Blick unmöglich erscheint, weil der Druck einer Wassersäulenhöhe von 90 m mit 9 atm. Spannung gleichwertig ist. Dessen Funktionieren wurde vom Patentamt bezweifelt, obwohl doch nicht das ganze Steigrohr mit Wasser, sondern auch mit Luft sich füllt. Das Rohr dürfte demnach kaum 2,7 m Wassersäulenhöhe entsprechenden Wasserinhalt haben.

Nachdem gewöhnlich $A_2 (h_m - h_s)$ unbedeutend klein gegen die Einheit im Nenner ist, so können wir, wie dies bei Berechnung des zuletzt behandelten Beispieles der Fall war, deren Wert gegen 1 ausser Beachtung lassen; und ist dann:

$$59) \ldots \quad V_o \simeq A_1 (h_s + 10) \sqrt{h_m - h_s} \quad \text{worin } A_1 = \frac{c}{10\,\lambda} \frac{T_o}{T_1}.$$

Beide Seiten durch A_1 dividiert und zum Quadrat erhoben gibt:

$$\left(\frac{V_o}{A_1}\right)^2 = (h_s + 10)^2 (h_m - h_s).$$ Nun wird diese Funktion der Luftstromstärke bezüglich Änderung des Wasserstandes h_s ein Maximum, wenn

$$\frac{d\,V^2}{d\,h_s} = 0 = 2 (h_s + 10) (h_m - h_s) - (h_s + 10)^2.$$

Dies wird der Fall sein wenn $2 (h_m - h_s) - (h_s + 10) = 0$, woraus folgt, dass dann sein muss:

$$60) \ldots \quad \text{für max. } V_o \quad |h_s| = \frac{2\,h_m - 10}{3},$$ welchen wir den **metazentrischen Wasserstand** nennen wollen.[1])

Also wird in unserem Beispiel beim Brunnen in R. wo $h_m = 60$ m ist, die grösste Luftstromstärke erforderlich sein, wenn der Wasserstand beharrend auf

$$|h_s| = \frac{2 \times 60 - 10}{3} = 40 - 3^1/_3 = 36^2/_3 \text{ m}$$ herabgesunken ist, was mit der graphischen Lösung in Abb. 13 stimmt.

Nach Gl. 59 ist die relativ maximal erforderliche Luftstromstärke (denn diese ist minimal bei dem gegebenen Wasserstand erforderlich)

$$61) \ldots \quad \text{Rel. Maximum } V_o = \frac{2}{3} A_1 (h_m + 10) \sqrt{\frac{h_m + 10}{3}},$$ in welchem für unser Beispiel $A_1 = 2{,}623 \times 10^{-4}$ und $h_m = 60$ m sind. Letztere Formeln ergibt somit für den Brunnen in R.[1]

$$\text{Rel. Maximum } 60^2\, V_o = \frac{2{,}6 \times 3600}{10000} \frac{2}{3}\, 70 \sqrt{\frac{70}{3}} = 212{,}6 \text{ m}^3\text{: St.}$$

Ist nun um $212{,}6 - 174{,}6 = 38$ m³: stündlich weniger Druckluft atm. Pressung zu verdichten erforderlich als das Maximum, welches erforderlich wäre, wenn der Wasserstand höher wäre, so ist aus der Schaulinie in Abb. 13 zu ersehen, dass für 174 m³: St. Druckluftverbrauch etwa 18—20 m Wasserstandshöhe und etwa 34 m³: stündlich hebbare Wassermenge entsprechen. Wollte man den entsprechenden Wasserstand berechnen, so wäre dies wohl aus Gl. 59 möglich; jedoch lohnt es nicht die Mühe, denn man müsste aus einer Gleichung 3. Grades den Wert von h_s herausrechnen. Für praktische Zwecke wird wohl die graphische Methode genügen.

Das Resultat, das aus der Schaulinie und der Gl. 61 erhalten wurde, stimmt mit dem Versuchsresultate in dem richtig überein, dass aus diesem Brunnen während 8 stündiger Betriebsdauer faktisch durchschnittlich in der Stunde 34 m³ gehoben wurde.[2]) Das Manometer am Luftkessel zeigte bei Beginn 6 Atm. Luftspannung und sank während einigen Minuten diese Spannung bis 3,25 Atm. allmählich hinab. Die letztere Spannung blieb dann während der übrigen ganzen Betriebsdauer mit unbedeutenden kleinen Schwankungen ziemlich die gleiche. Die Spannung bei Beginn entspricht richtig dem Gegendruck des höchsten Wasserstandes, nämlich $h_m = 60$ m, und die Betriebsspannung deutet nur darauf hin, dass der Wasserstand im Brunnen unter 32,5 m Höhe schwankte.

---

[1]) Diese Höhe hat viel Ähnlichkeit mit der vom Aufhängepunkt gemessenen Entfernung des Schwingungsmittelpunktes materieller Pendel, und mit der Höhe des **Metazentrums bei Schiffen**; demnach die gewählte Benennung auch bei Brunnenwasserständen wohl gerechtfertigt sein wird.

[2]) Jedoch war die Luftstromstärke grösser, weil infolge etwas zu weiten Steigrohres das Wasser ungleichmäfsig, wenn auch schwach intermittierend gehoben werden konnte.



X. Bestimmung der Steighöhe.

Die Steighöhe des Wassers besteht aus der Ausfluss- und Ausgusshöhe und lässt sich als Funktion des Brunnenwasserstandes folgenderweise ausdrücken.

Aus Gl. 27 folgt, dass in irgend einem H hohen Niveau während der geringen Zeit dt durch den Weg dH die folgende, die ganze Weite F des Steigrohres einnehmende Luft- und Wassermenge hinaufströmt:

62a) . . . . $(Q + V)\, dt = F dH$, worin $Q = Q_1$ überall konstant bleibt. Nun ist nach Gl. 41 für gleiche konstante Temperatur der im Steigrohr bewegten Luft

62b) . . . . $Vp = V_1\, p_1$. Weil ferner auf jedem beliebigen Niveau ein Druck herrscht, welcher von der über dasselbe liegenden Luft- und Wassermenge herrührt, so vermindert sich dieser Niveaudruck von unten nach aufwärts mit so viel als das Gewicht des Luft- und Wasserinhaltes des Steigrohres von unten nach aufwärts in der Höhe dH beträgt. Also ist diese Druckverminderung: $(Q\varrho + V\gamma)\, dt = - F dp'$. Oder weil das Gewicht der Luft gegen das des Wassers unbedeutend klein ist, daher ausser Rechnung gestellt werden kann:

62c) . . . . $Q\, dt \simeq - F \frac{dp'}{\varrho}$. Nun müssen wir der Vereinfachung halber beachten, dass nach Gl. 47b der Repulsivdruck der Luft am Mündungsniveau des Luftrohres umsoweniger vom Niveaudruck verschieden ist, je grösser die Mündungsweite und je geringer die Luftstromstärke ist. Umsomehr ist der ähnliche Fall in höheren Niveaus, allwo die Weite des Steigrohres grösser ist, so dass wir für angenäherte Resultate im allgemeinen $p \simeq p'$ nehmen können. Hiermit erhalten wir aus Gl. 62a und c durch Eliminieren von $\frac{dt}{F}$ zuförderst

$dH = - \left(1 + \frac{V}{Q}\right) \frac{dp'}{\varrho}$. Dann den Wert des Luftvolumens V aus Gl. 62b eingesetzt und beachtet, dass nach Gl. 42a $\frac{V_1}{Q} = \frac{1}{\lambda}$ ferner annähernd $\frac{p_1}{p} \simeq \frac{p_1'}{p'}$ sind

62d) . . . . . $dH \simeq - \frac{dp'}{\varrho} - \frac{p'_1}{\lambda\, \varrho} \frac{dp'}{p'}$. Wenn wir nun diese Gleichung mit Beachtung der Gl. 46b, c zwischen den entsprechenden Grenzen von $H = 0$ bis H_s und von $p' = (h_s + 10)\,\varrho$ bis $10\,\varrho$ integrieren, so erhalten wir die Steighöhe als Funktion des Wasserstandes, nämlich:

$$63) \quad H_s \simeq h_s + (h_s + 10) \frac{1}{\lambda} \log \text{nat} \frac{h_s + 10}{10} = h_s + Z'.$$

Man ersieht aus dieser Formel, dass die erreichbare Steighöhe näherungsweise ausschliesslich nur von dem allfälligen Brunnenwasserstand abhängig ist.

Es ist nun besonders interessant zu wissen, welche minimale Steighöhe erreichbar wird, wenn man die maximale Luftstromstärke anwendet. Nach Gl. 60 für max. V_0 den entsprechenden Wert von h_s in letztere Formel eingesetzt, gibt die Steighöhe, welche wir so bezeichnen wollen:

$$(H_s)_0 \doteq \frac{2\, h_m - 10}{3} + \frac{2}{3\lambda} (h_m + 10) \log \text{nat} \frac{2}{3} \frac{h_m + 10}{10}.$$



Man nennt gewöhnlich $H_s - h_m$ die Förderhöhe und h_m die anfängliche Tauchtiefe des Luftrohres, und pflegt ein besonderes Gewicht darauf zu legen, wie gross das Verhältnis der Förderhöhe zur Tauchtiefe sei. Nach letzterer Formel kann man darüber ein Urteil fällen, dass diese Verhältniszahl von der anfänglichen Tauchtiefe h_m selbst stark abhängt. Und zwar wird:

$$\frac{(H_s)_0 - h_m}{h_m} \doteqdot \left(\frac{2}{\lambda} \log \operatorname{nat} \frac{2}{3} \frac{h_m + 10}{10} - 1\right) \frac{h_m + 10}{3\, h_m}.$$

Den Gebrauch der letzteren Formeln können die folgenden Tabellen in manchen Fällen ersetzen. Es sind darin die entsprechenden Steighöhen und deren Verhältniszahlen nach erwähnten Formeln für verschiedene Werte der Wasserstände berechnet.

Tabelle I.

Erreichbare Steighöhen bei verschiedenen Wasserständen.

Wenn der Wasserstand h_s = Meter	5	10	20	30	40	50	60	70	80	90
so ist die erreichbare Steighöhe H_s = Meter	15,1	33,1	74,9	122,4	174,1	229,2	287,0	346,9	409,5	473,7
Das Verhältnis $\frac{H_s}{h_s}$ =	3,03	3,31	3,74	4,08	4,35	4,58	4,78	4,94	5,12	5,26

Tabelle II.

Erreichbare Steighöhen bei verschiedenen Tauchtiefen des Luftrohres bewirkt durch grösst erforderliche Luftstromstärken.

Wenn die anfäng. Tauchtiefe h_m = Meter	10	15	20	30	40	50	60	70	80	90	100
so ist die erreichbare Steighöhe bei stärkst. erf. Luftstrom (H_s) = Meter	9.78	20,85	33,33	45.67	90,8	123,4	157,7	193,5	230,9	269,4	309,0
und das Verhältnis der Förderhöhe zur anfäng. Tauchtiefe $\frac{(H_s) - h_m}{h_m}$ =	$\frac{-1}{50}$	$\frac{+2{,}32}{10}$	$\frac{1{,}33}{2}$	$\frac{1{,}57}{3}$	$\frac{5{,}08}{4}$	$\frac{7{,}34}{5}$	$\frac{9{,}77}{6}$	$\frac{12{,}35}{7}$	$\frac{15{,}09}{8}$	$\frac{17{,}94}{9}$	$\frac{20{,}90}{10}$

Aus letzterer Tabelle ist zu ersehen. dass bei einer anfänglichen Tauchtiefe des Luftrohres bis $h_m = 10$ m nur eine geringere Steighöhe als diese anfängliche mit dem höchsten Wasserstande identische Tauchtiefe erreicht werden kann, wenn noch so starker Luftstrom eingeblasen wird. Hingegen ist es möglich, dass bei Anwendung einer entsprechend geringeren Luftstromstärke, wie in Abb. 13 aus der Schaulinie ersichtlich ist, der Wasserstand nicht stark hinabgesenkt wird, wodurch beharrlich wohl weniger Wasser auf eine aus Tabelle I ersichtliche grössere Höhe gehoben werden kann. Die Förderhöhe steigt sehr rapid mit Vergrösserung der Tauchtiefe

des Luftrohres, sodass bei anfänglicher Tauchtiefe von 100 m mit dem stärksten Luftstrom schon die doppelt so grosse Förderhöhe erreicht werden kann, als die Tauchtiefe des Luftrohres beträgt, wobei der Wasserstand während des Betriebes mit stärkstem Luftstrom bis auf $h_s = {}^2/_3\, h_m - 3^1/_3 = 63^1/_3$ m Höhe hinabsinkt.

Zur bequemen Anwendung der Gl. 63 bezeichnen wir den logarithmischen Teil der rechten Seite einfach mit Z'. Die Werte dieser Funktion, welche nahezu mit den effektiven Förderhöhen identisch sind, findet man für verschiedene Wasserstände in der III. Tabelle fertig berechnet vor.

Tabelle III.

Werte der effektiven Förderhöhen für verschiedene abgesenkte Wasserstände.

h_s Meter	Wasserstand h_s in Metern: 0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
	Werte der Förderhöhen $Z' \cong H_s - h_s$									
0,0	0,00	23,10	54 90	92,4	134,1	179,2	227,0	276,9	329,5	383,7
0,5	0,85	24,53	56,66	94,4	136,3	181,5	229,4	279,5	332,1	386,3
1,0	1,75	25,95	58,45	96,4	138,6	183,8	231,9	282,2	334,8	389,1
1,5	2,68	27,42	60,22	98,4	140,8	186,1	234,3	284,8	337,4	391,8
2,0	3,65	28,90	62,00	100,4	143,1	188,5	236,8	287,5	340,2	394,6
2,5	4,64	30,40	63,84	102,4	145,2	190,8	239,4	290,1	342,9	397,4
3,0	5,68	31,83	65,65	104,5	147,3	193,1	241,9	292,7	345,5	400,1
3,5	6,75	33,45	67,50	106,5	149,5	195,4	244,5	295,3	348,2	402,9
4,0	7,85	35,00	69,34	108,6	151,7	198,0	246,9	297,9	350,9	405,7
4,5	8,98	36,45	71,20	110,7	153,9	200,3	249,4	300,5	353,5	408,5
5,0	10,14	38,17	73,10	112,8	156,2	202,7	251,9	303,1	356,1	411,3
5,5	11.32	39,77	74,94	114,9	158,5	205,1	254,3	305,7	358,8	414,1
6,0	12,53	41.40	76,85	117,0	160,8	207,5	256,7	308,3	361,5	417,0
6,5	13,77	43,70	78,75	119,1	163,1	209,0	259,1	311,0	364,3	419,8
7,0	15,03	44,70	80,68	121,2	165,3	212,4	261,7	313,5	367,1	422,6
7,5	16,32	46,32	82,60	123,3	167,3	214.6	264,4	316,2	369,1	425,4
8,0	17,63	48,05	84,55	125,4	169,9	216,9	267,0	318,9	372,7	428,2
8,5	18,97	49,72	86,52	127,5	172,2	219,3	269,5	321,5	375,5	431,0
9,0	20,33	51,42	88.45	129,7	174,5	222,0	272,0	324,2	378,2	433,8
9,5	21,70	53,17	90.41	131,8	177,8	224,4	274,4	326,8	381,1	436,6

Nachdem nun $Z' + h_s = H_s$ nämlich die ganze Steighöhe ergibt, so folgt, dass zum Beispiel bei einem Wasserstande $h_s = 90$ m eine $90 + 383{,}7 = 473{,}7$ m hohe Steighöhe erreicht werden kann. Hingegen kann bei einem Wasserstande von 3 m nicht mehr als eine $3 + 5{,}68 = 8{,}68$ m hohe Steighöhe erreicht werden. Aus Gl. 63 kann die Grundursache erkannt werden, warum solche Versuche und Erfindungen (wie die Starret'sche Pumpe), welche mit geringem Druck bei geringem Wasserstande Wasser mit Druckluft auf bedeutend grosse Höhen zu heben bezwecken sollen, misslingen müssen.



XI. Bestimmung der Steigrohrweite.

Es erübrigt noch die gemeinsame Geschwindigkeit der im Steigrohr schichtenweise aufsteigenden Luft- und Wassermengen als Funktion der Niveauhöhe und des Niveaudruckes zu bestimmen. Der Betrieb beginnt mit allmählich zunehmendem Repulsivdruck der Luft im Luftrohr bis zu dem höchsten Druck, welcher dem vorhandenen höchsten Wasserstande h_m, ohne dass Druckluft ins Wasser kommen kann, entspricht. Von diesem Momente an steigt der Unterschied zwischen Repulsivdruck der Luft und Niveaudruck nur langsam, währenddem die Stromstärke der ins Wasser gedrängten Luft auch nur langsam anwächst. Infolgedessen steigen anfangs nur kleinere Luftblasen ins Steigrohr, welche die Weite des Steigrohres nicht ausfüllen können, daher nur bewirken, dass der Wasserstand im Steigrohr bis über das Ausflussniveau emporsteigt, dort Wasser ausgiesst und infolgedessen der Wasserstand im Brunnen nach Maſs der ausgiessenden Wassermenge und des Brunnenzuflusses langsamer oder schneller absinkt. Hierdurch steigt aber die Luftstromstärke V_1 und sinkt der Druck p_1 der ins Wasser eingeführten Druckluft, wodurch im entsprechend engen Steigrohr sich Luft- und Wasserschichten bilden können; denn die vor der Luftrohrmündung sich bildenden Blasen haben nun an Umfang zugenommen.

Dass die Blasen deshalb frei emporsteigen, weil deren Auftrieb grösser ist als ihr Eigengewicht, ist bekannt. Es taucht nun die Frage auf, warum die Luftschichten aufsteigen, obwohl sie keiner Auftriebskraft unterworfen sind? — Denn sie sind nicht von allen Seiten von Wasser umgeben, sondern vielmehr von oben durch die Wasserschichten belastet, und von unten durch den Brunnenwasserstand unterstützt. Nun geht durch irgend ein H hohes Niveau die Luftmenge V und die Wassermenge Q in der Sekunde mit der Geschwindigkeit U hindurch. Wir wollen untersuchen, ob diese Geschwindigkeit mit der Niveauhöhe zu- oder abnimmt. Nun ist nach Gl. 27, wenn wir den Wert des Luftvolumens V durch das am Mündungsniveau unter innerm Druck p_1 innegehabte Luftvolumen V_1 aus Gl. 41 ersetzen $FU = V + Q = \frac{V_1 p_1}{p} + Q$. Weil aber dort die mitbeschleunigte Wassermenge nach Gl. 42a $Q = \lambda V_1$ ist, so folgt schliesslich, dass während einer Sekunde durch ein H hohes Niveau die folgende Wasser- und Luftmenge schichtenweise hindurchgeht:

64a) . . . . $FU \quad \left(\frac{p_1}{p} + \lambda\right) V_1$. Beginnt die Schichtenbildung nahe zum Mündungsniveau, wo der Repulsivdruck der V_1 Raummenge Luft $p = p_1$ ist, so ist die Wasser- und Luftmenge dort infolge der Druckdifferenz, welche zwischen Repulsivdruck p_1 und Niveaudruck p'_1 herrscht:

64b) . . . . $FU_1 = (1 + \lambda) V_1$. Aus beiden letzteren Gleichungen folgt, dass das Verhältnis der Geschwindigkeit, mit welcher die Schichten durch ein höheres Niveau gehen, zu derjenigen beim Mündungsniveau:

$$\frac{U}{U_1} = \frac{\frac{p_1}{p} + \lambda}{1 + \lambda}.$$ So ist z. B. für $\lambda = 0{,}6$.

Wenn $\frac{p_1}{p} =$	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8
$\frac{U}{U_1} =$	1,	1,625,	2,25,	2,875	3,50	4,125,	4,75,	5,375.

Bezeichnen wir die Geschwindigkeit, mit welcher die Luft- und Wasserschichten durchs Ausflussniveau gehen, mit U_i, so wird nach Obigem dieselbe infolge Ausdehnung der Druckluft vom Druck p_l bis p_i um so grösser sein, als die Geschwindigkeit im tieferen Niveau, je höher der Brunnenwasserstand und der Repulsivdruck der einströmenden Luft sind. Die Wasserschichten werden also teils durch die Niveaudruckdifferenz zwischen Wasserstand und Ausflusshöhe, teils durch Expansion der Luft in den Schichten gehoben.

Es erübrigt nun noch die gemeinsame Geschwindigkeit der emporsteigenden Luft- und Wasserschichten als Funktion der Niveauhöhe und des Niveaudruckes zu bestimmen. Nun geht durch irgend ein H hohes Niveau die Wassermasse $\frac{Q\varrho}{g}$ (kg $\times$ Sek. : m) hindurch, deren Gewicht $Q\varrho$ ist. Wenn wir die unbedeutende Masse der Luft gegen die des Wassers nicht in Rechnung ziehen, so ist das erwähnte Gewicht ein Teil der Kraft, welche der Repulsivkraft der Luft während dem Bestreben auf Ausdehnung widersteht. Der andere Teil ist der Widerstand der Steigrohrwand, welchen wir vorläufig ausser Rechnung lassen wollen, ohne diesen wäre die Geschwindigkeit, mit welcher die Luft- und Wasserschichten durch irgend ein H hohes Niveau hindurchgehen würden U, somit die Beschleunigung $\frac{dU}{dt}$, daher der Trägheitswiderstand einer Wasserschichte $\frac{Q\varrho}{g}\frac{dU}{dt}$. Die wirksame Kraft ist die Differenz des Repulsivdruckes der Luft, welcher in Richtung der Bewegung abnimmt. Also wirkt auf eine Schichtengruppe, welche während der Zeit dt durch das Niveau hindurchgeht $-\frac{F\,dp}{dt}$. Nach dem Grundprinzip der Mechanik muss aber die wirksame Kraft mit den widerstehenden Kräften und dem Trägheitswiderstand im Gleichgewicht sein, somit muss:

$$-\frac{F\,dp}{dt} = \frac{Q\varrho}{g}\frac{dU}{dt} + Q\varrho.$$

Durch Multiplikation aller Glieder dieser Gleichung mit $\frac{U\,dt}{Q\varrho}$ ergibt sich:

$$-\frac{FU}{Q}\frac{dp}{\varrho} = \frac{U\,dU}{g} + U\,dt.$$

Nun ist nach Gl. 64a und 20e: $\frac{FU}{Q} = \frac{1}{\lambda}\frac{p_l}{p} + 1$. Ferner ist $U\,dt = dH$.

Somit gestaltet sich die letztere Gleichung wie folgt:

$$-\frac{1}{\lambda}\frac{p_l}{\varrho}\frac{dp}{p} - \frac{dp}{\varrho} = \frac{U\,dU}{g} + dH.$$

Durch Integration dieser Gleichungen zwischen den Grenzen $H = o$ bis H_i, $p = p_l$ bis p_i und $U = U_l$ bis U_i ergibt sich nach entsprechendem Ordnen der Glieder, dass das theoretische Geschwindigkeitspotenzial der Schichten am Ausflussniveau des Steigrohres:

$$65\text{a})\quad \frac{U_i^2}{2g} = \frac{U_l^2}{2g} + \frac{1}{\lambda}\frac{p_l}{\varrho}\log\text{nat}\frac{p_l}{p_i} + \frac{p_l - p_i}{\varrho} - H_i.$$

Der Rohrwiderstand E jedoch vermindert die Beschleunigung der Schichten. Würde diese als Trägheitskraft auf Beschleunigung der Masse $\frac{Q\varrho}{g}$ wirken und wäre

die resultierende Geschwindigkeit w, so müsste

$E = \frac{Q\varrho}{g} \frac{dw}{dt}$ sein. Wenn wir den Wert von E nach Gl. 30 einsetzten, dann einfach $\frac{4\mu_1}{\varrho} = \mu = \frac{4 \times 2{,}63}{1000} = 0{,}01052$ bezeichnen und beide Seiten der Gleichung mit $\frac{w\,dt}{Q\varrho}$ multiplizieren, so folgt nachdem $w\,dt = dH$:

$$\frac{\mu}{D-d} dH = \frac{w\,dw}{g}.$$

Durch Integration zwischen den Grenzen $H = o$ bis H_i und $w = w_1$ bis w_i ergibt sich:

$\frac{w_i^2}{2g} = \frac{w_1^2}{2g} + \frac{\mu}{D-d} H_i$. Um diese Grösse wird das theoretische Geschwindigkeitspotenzial durch den Röhrenwiderstand vermindert. Setzen wir nach Weisbachs Methode

$\frac{U_i^2e - U_1^2e}{U_i^2 - U_1^2} = \zeta = \frac{\mu H_i}{D-d} = \frac{w_i^2 - w_1^2}{2g}$, worin U_ie und U_1e die entsprechenden effektiven Geschwindigkeiten der Schichten bedeuten, so erscheint $\zeta \frac{U_i^2 - U_1^2}{2g}$ als ein durch Reibungswiderstand verlorener Druckhöhenunterschied, welcher vereint mit dem Unterschiede des theoretischen Geschwindigkeitspotenzials die effektiven Druckhöhenunterschiede gibt.

Somit folgt aus Gl. 65a, dass

$$65b) \quad \ldots \quad \left(1 + \frac{\mu H_i}{D-d}\right) \frac{U_i^2 - U_1^2}{2g} = Z_i + z_i - H_i,$$

$$\text{worin } Z_i = \frac{1}{\lambda} \frac{p_1}{\varrho} \log \text{nat} \frac{p_1}{p_i}$$

$$\text{und } z_i = \frac{p_1 - p_i}{\varrho}.$$

Bei vollkommener Ausnutzung der Luftspannung soll deren Repulsivdruck am Ausflussniveau $p_i \cong p_o$, das heisst gleich dem äusseren Atmosphärendruck werden. Auch ist näherungsweise $p_1 \cong p'_1$, somit ist näherungsweise:

$$Z_i \cong \frac{1}{\lambda} \frac{p'_1}{\varrho} \log \text{nat} \frac{p'_1}{p_o} = \frac{1}{\lambda} (h_s + 10) \log \text{nat} \frac{h_s + 10}{10}$$

und $z_i \cong \frac{p'_1 - p_o}{\varrho} = h_s$. Somit ist nahezu $Z_i \cong Z'$, mit welchem Buchstaben wir die effektive Förderhöhe in Gl. 63 bezeichneten.

Nun ist aber näherungsweise $z' + h_s \cong H_s$, folglich ist auch $Z_i + z_i \cong H_s$, d. h. der Steighöhe gleich.

Somit ist schliesslich:

$$65c) \quad \ldots \quad \left(1 + \frac{\mu H_i}{D-d}\right) \frac{U_i^2 - U_1^2}{2g} \cong H_s - H_i = h_l,$$ welche die Ausgusshöhe darstellt.

Diese Ausgusshöhe ist aber willkürlich wählbar, wenn die erforderliche Wassermenge oder die Weite des Steigrohres gesuchte Grössen sind.



Betrachten wir also die Ausgusshöhe als gegebene Grösse, so ist weil nach Gl. 64a und 42a näherungsweise:

$$U_i \cong \left(\frac{1}{\lambda}\frac{p'_1}{p_0}+1\right)\frac{Q_s}{F} \text{ und } U_1 = \left(\frac{1}{\lambda}+1\right)\frac{Q_s}{F}, \text{ auch weil}$$

$$F = (D+d)\,(D-d)\,\frac{\pi}{4}$$ für Steigrohre, bei welchen das Luftrohr innerlich hinabgeleitet ist, oder:

$$F = \frac{D^2\pi}{4}$$ für Steigrohre, neben welchen das Luftrohr äusserlich herabgeleitet ist:

$$65\text{d})\ \ldots\ldots\ Q_s = \frac{(D+d)\,(D-d)}{\sqrt{1+\frac{\mu H_i}{D-d}}}\,\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{2g\,h_i}{A}},$$

worin:

$$65\text{e})\ \ldots\ldots\ A = \left(\frac{1}{\lambda}\frac{p'_1}{p_0}+1\right)^2 - \left(\frac{1}{\lambda}+1\right)^2 \text{ bedeutet.}$$

Umgekehrt folgt aus letzteren Gleichungen, dass der Durchmesser des Steigrohres, bei welchem das Luftrohr innerlich abgeleitet werden soll:

$$66\text{a})\ \ldots\ D = \sqrt{d^2 + \frac{4}{\pi}\,Q_s\sqrt{\frac{A}{2g\,h_i}\left(1+\frac{\mu H_i}{D-d}\right)}}.$$

Und der Durchmesser des Steigrohres, wenn das Luftrohr ausserhalb desselben hinabgeführt wird:

$$66\text{b})\ \ldots\ D = \sqrt[5]{\left(\frac{4}{\pi}\right)^2(\mu H_i + D)\,\frac{A}{2g\,h_i}\,Q_s^2}.$$

In beiden letzteren Formeln müssen die Durchmesser der Steigrohre probeweise angenommen werden. Stimmt das Resultat nicht genügend genau, so muss ein wahrscheinlich genauerer Wert des Durchmessers angenommen und die Rechnung wiederholt werden. Es ist $\mu = 0{,}0105$, $\lambda = 0{,}6$, $h_i = {}^1/_2$ bis 1 Meter anzunehmen. Ferner sind $g = 9{,}81$, $m : Sec^2$, $\pi = 3{,}141$ und alle Grössen in Metern-Kilogrammen für die Sekunde einzusetzen.

Im Beharrungszustande bleibt der Wasserstand konstant, indem die geforderte Wassermenge Q_s gerade der Zuflussstärke des Brunnens entspricht. Somit ist nach Gl. 40:

$Q_s^2 = c^2\,(h_m - h_s)$. Nun ist aber die Funktion A auch vom allfälligen Wasserstande abhängig, indem nach Gl. 46 b c:

$\frac{p'_1}{p_0} = \frac{h_s + 10}{10}$. In Formel 66b darf, also wenn Q_s gegeben ist, A nicht willkürlich gewählt werden, sondern zuerst aus Gl. 40 der entsprechende Wasserstand berechnet werden.

Dann ist, wenn:

der Wasserstand	$h_s =$	10	20	30	40	50	60	70 Meter,
	$\frac{p'_1}{p_0} =$	2	3	4	5	6	7	8 Atm.,
demnach . . .	$A =$	11,66	29,01	51,6	80,8	113,7	153,15	198,4.



Setzen wir in Gl. 66b alle Zahlenwerte der bekannten Koëffizienten ein, und ersetzen die Werte von A und Q_s durch Funktionen des Wasserstandes, so folgt, dass es sei:

$$67)\quad D \cong 0{,}607 \sqrt[5]{(0{,}0105\ H_1 + D)\ c^2 \frac{h_m - h_s}{h_i} \left\{ \left(\frac{h_s + 10}{6} + 1 \right)^2 - 7{,}1 \right\}}.$$

Es ist bemerkenswert, dass durch die Näherungsrechnung eine Druckhöhe h_p ausser Rechnung gefallen ist, welche vom Unterschiede abhängig ist, der zwischen dem Repulsivdruck der Luft und dem Niveaudrucke herrscht. Diese Druckhöhe erscheint, wenn man mittels der Gl. 47b genau rechnet, als Zuschuss zur Ausgusshöhe, so dass dann in der genauen Formel statt h_i die Summe $h_i + h_p$ erscheint, und dann nie D unendlich gross werden könnte, wenn auch die Ausgusshöhe h_i als unendlich kleine Grösse in Rechnung gestellt würde.

XII. Wirkungsgrad des Wasserhebers.

Der Wirkungsgrad des Wasserhebers ist umso grösser, je grösser die Geschwindigkeit sein kann, mit welcher die Luftschichten am Ausflussniveau ausströmen und je kleiner diejenige Geschwindigkeit ist, mit welcher die Luftschichten im Steigrohr emporzusteigen beginnen.

Infolge der geringen Wärmekapazität der Luft kann vorausgesetzt werden, dass die Expansion der Luftschichten im Steigrohr unter gleichbleibender Temperatur erfolgt. Infolgedessen ist nach Gl. 41 der Repulsivdruck der Luft in einem höheren beliebigen Niveau:

$$p = \frac{V_0}{V} p_0 \frac{T_1}{T_0}$$ und die mechanische Arbeit, währenddem die Luftmenge V um das Volumen d V sich ausdehnt:

$$d L = p\, d V = V_0 p_0 \frac{T_1}{T_0} \frac{d V}{V}.$$

Hieraus folgt durch Integration zwischen Grenzen $V = V_1$ bis V_i, dass die Arbeit, welche die Luft vom Luftrohrmündungsniveau bis zum Ausflussniveau isothermisch sich ausdehnend verrichtet, ist:

$$68a)\quad \ldots\ldots\quad L = V_0 p_0 \frac{T_1}{T_0} \log \text{nat} \frac{V_i}{V_1}.$$

Ähnlicherweise folgt, dass die disponible Arbeit der Druckluft, indem sie vom Rauminhalt V_0 unter einem Atmosphärendruck und unter Beibehaltung der Temperatur T_0 bis zum Rauminhalt V_r und Druck p_r in den Luftkessel gepresst werden muss:

$$68b)\quad \ldots\quad L_d = V_0 p_0 \frac{T_1}{T_0} \log \text{nat} \frac{V_0}{V_r} \qquad \text{worin } V_r = V_1 \frac{p_1}{T_0} \frac{T_0}{T_1}.$$

Somit folgt, dass der Wirkungsgrad der Luftexpansion:

$$68c)\quad \ldots\quad \eta = \frac{L}{L_d} = \frac{\log V_i - \log V_1}{\log V_0 - \log V_1 - \log \frac{T_0}{T_1} + \log \frac{p_r}{p_1}}.$$



Nun ist aber nach Gl. 27: $V_i = F U_i - Q$ und mit Gl. 42: $V_1 = F U_1 - Q = \frac{Q}{\lambda}$.
Somit ist:

68d) $$\eta = \frac{\log (F U_i - Q) - \log Q + \log \lambda}{\log V_0 - \log Q + \log \lambda - \log \frac{T_0}{T_1} + \log \frac{p_r}{p_1}}.$$

Der Wirkungsgrad ist demnach um so grösser, je grösser die Geschwindigkeit der Ausströmung am Ausflussniveau und je kleiner die Luftstromstärke V_0 ist, welche verdichtet zur Wirkung kommt; ferner je geringer der Druckverlust im Luftrohr ist.

Das Mittel zur Hebung des Wirkungsgrades ist die Verminderung des Repulsivdruckes der Luft am Mündungsniveau, damit ihr spezifisches Volumen möglichst gross sein könne und damit dasselbe sich während dem Wasserheben leichter bis nahe zum spezifischen Volumen der atmosphärischen Luft ausdehnen könne.

Der Nutzeffekt, nämlich die mechanische Arbeit, welche durch die Druckluft verrichtet werden muss, damit in der Sekunde $Q\varrho$ Gewicht Luft auf die Höhle H_i vom h_s hohen Wasserspiegel befördert werde, ist offenbar:

69a) $$L_n = Q\varrho (H_i - h_s).$$

Somit erhalten wir den Wirkungsgrad des Nutzeffektes mittels Gl. 68b:

$\eta_n = \frac{L_n}{L_d}$. Dieser Wirkungsgrad des Nutzeffektes fällt erfahrungsgemäfs zwischen Null und 50 Prozent. Aus Gl. 68b ist ersichtlich, dass auch das Verhältnis der absoluten Temperaturen des Brunnenwassers und der atmosphärischen Luft, von welcher die Luftpumpe die zu verwendende Luft entnimmt, Einfluss auf den Wirkungsgrad haben, weil die disponible Arbeit mit Zunahme der Brunnentemperatur wächst und mit Zunahme der atmosphärischen Lufttemperatur abnimmt.

Drücken wir in Gl. 69a den Wert von Q durch die Luftstromstärke V_1 nach Gl. 42a aus und substituieren dann den Wert von V_1 aus Gl. 41 folgernd, so wird:

69b) $$Q = \lambda V_1 = \lambda V_0 \frac{p_0}{p_1} \frac{T_1}{T_0}.$$

Ferner ist in Gl. 68b nach Gl. 41 $\frac{V_0}{V_r} = \frac{p_r}{p_0}$.

Somit wird, nachdem sich die Faktoren im Zähler und Nenner heben:

70) $$\eta_n = \frac{L_n}{L_d} = \frac{H_i - h_s}{\frac{1}{\lambda} \frac{p_1}{\varrho} \log \text{nat} \frac{p_r}{p_0}}.$$ Hieraus ist ersichtlich, dass der Wirkungsgrad des Nutzeffektes direkt proportional zur effektiven Förderhöhe und umgekehrt proportional zum Luftdruck sich ändert.

Der Druck der Luft p_1 am Mündungsniveau ist aber nur in unbedeutendem Mafse von der Temperatur des Brunnenwassers und der atmosphärischen Luft abhängig, wie dies die Untersuchung des Koëffizienten K_0 in Gl. 47b zeigt.

Mithin könnte der Wirkungsgrad des Nutzeffektes 100 % werden. Es müsste nur $\eta_n = 1$ daher:

$$\frac{\lambda \varrho}{p_i} (H_i - h_s) \div \log \text{nat} \frac{p_r}{p_0} \text{ sein.}$$

Es gibt also für jeden Druck im Luftkessel eine bestimmte Förderhöhe, für welche der Nutzeffekt 100 % des disponiblen Arbeitseffektes erreichen könnte oder umgekehrt.

Ist nun der Druckverlust im Luftrohr gleich Null also $p_l = p_r$ und der absolute

Druck im Luftkessel . .	$\frac{p_r}{p_o}$ =	1,5	2	2,5	3	3,5	4	Atm.
so müsste für $\lambda = 0{,}5$ und $\eta = 100\,\%$ die Förderhöhe	$H_i - h_s$ =	12,16	27,7	45,8	65,9	87,7	110,9	Meter
und dem Luftdruck entsprechend der Wasserstand	h_s =	15	20	25	30	35	40	„
und die Ausflusshöhe . .	H_i =	27,16	47,7	70,8	85,9	122,7	150,9	„

sein. Ist aber der Druckverlust im Luftrohr gross, so muss die Förderhöhe dem p_l linear proportional niedriger werden, als die obigen. Wenn auch der zur Grundlage dieser Rechnung genommene hohe Wirkungsgrad bei weitem praktisch nicht erreicht werden kann, und zwar deshalb weil teils die isothermische Kompression der Luft infolge Unvollkommenheit der Kühlung bei der Luftpumpe nie möglich ist, teils weil der Druckverlust im Luftleitungsrohr um so grösser ist, je höher die Temperatur im Luftkessel und je niedriger die Temperatur des Brunnenwassers ist, so zeigt doch diese Untersuchung die Richtung, welche man behufs Erlangung eines hohen Wirkungsgrades einschlagen soll.

Nach Professor Randall (Siehe: Engin. News 1893, Vol. 29, Seite 541) soll ein Wirkungsgrad der Luftexpansion von 79 % mit Luft von $1^2/_3$ Atm. Spannung und 15° C. Temperatur erreicht werden können, wobei Wasser von gleicher Tempertaur gehoben werden kann, und der Wirkungsgrad steigt um so mehr, je höher die Temperatur des Brunnenwassers ist; so dass wenn das Brunnenwasser 92,5° C. warm wäre, der Wirkungsgrad des Nutzeffektes 100 % erreichen würde. Nun die Erwärmung des Brunnenwassers ist praktisch nicht billig ausführbar, wohl aber ist es möglich die Luft nicht nur während der Verdichtung, sondern nach derselben im Luftkessel billig zu kühlen und schon die von der Luftpumpe einzusaugende Luft von einem kühlen Orte zuzuleiten. Übrigens folgt dies auch aus Gl. 68c, nach welcher der Wirkungsgrad der Luftexpansion $\eta = 1$ wird, wenn der Druckverlust im Luftrohr gleich Null, demzufolge $p_r = p_l$ und die Temperatur des Brunnenwassers gleich der Temperatur der Luft im Luftkessel ist. Weil nun bei isothermischer Verdichtung $T_r = T_o$ ist, so soll möglichst auch die Temperatur des Brunnenwassers $T_l = T_r = T_o$ sein. Ferner ist nahezu $p_i = p_o$. Unter diesen Bedingungen wird dann die Raummenge der expandierten Luft V_i gleich der Raummenge V_o sein, welche sie vor der Verdichtung inne hatte. Es wird dann nach Gl. 41 sein:

$$\frac{V_i}{V_o} \div \frac{p_o T_l}{p_i T_o} \cong 1.$$



XIII. Bestimmung der Eintauchtiefe des Luftrohres.

Nachdem wir den effektiven Wasserstand h als abhängige Grösse der Zuflussstärke des Brunnens mittels Gl. 40 ermitteln können, so folgt, dass:

71 a) . . . . $h = h_m - \left(\frac{Q}{c}\right)^2$. Variiert aber die effektive Tauchtiefe h_m des Luftrohres, welche mit dem höchsten Wasserstande identisch ist, so ändert sich zugleich die Zuflussstärke Q und der allfällige Wasserstand. Damit wir also den zu einer bestimmten Zuflussstärke zugehörigen Wasserstand unabhängig von der Tauchtiefe des Luftrohres ausdrücken können, wollen wir anstatt den Niveauhöhen die vom oberirdischen Ausflussniveau abwärts messbaren Niveautiefen in Rechnung stellen, wie solche in Abb. 14 dargestellt sind.

Abb. 14. Bezeichnung der Niveauhöhen und Niveautiefen.

Wir setzen demnach die Höhe des obersten Wasserspiegels: $h_m = H_i - s_m$, worin s_m die Tiefe desselben von der Ausflusshöhe bedeutet. Ähnlich setzen wir die Höhe des abgesenkten Wasserspiegels:

71 b) . . . . . $h = H_i - s$.

Hiermit folgt nach Gl. 71 a, dass:

71 b) . . . . $s = s_m + \left(\frac{Q}{c}\right)^2$. Oder bei einem abgesenkten Wasserspiegel die gesuchte Zuflussstärke:

71 c) . . . . . $Q = c\sqrt{s - s_m}$.

Man muss das Luftrohr um so tiefer eintauchen je grösser die erforderliche Wassermenge ist. Nun muss aber beachtet werden, dass die Grenze der Eintauchtiefe durch den disponiblen Druck bedingt wird, auf welchen die Luftpumpe die Luft zu verdichten vermag. Denn bei Beginn des Betriebes muss der höchste Wasserstand $h_m = H_i - s_m$ durch den Repulsivdruck der Luft überwunden werden können. Wenn

$\frac{h_k}{10} + 1 =$ Maximum $\frac{p_k}{10}$ der Druck ist, welchen die Luftpumpe hervorbringen kann, so muss notwendigerweise

$h_m \leqq h_k$ sein. Folglich darf die Tauchtiefe des Luftrohres gemessen von der Ausflusshöhe höchstens betragen:

72) . . . . $(H_i)_k = h_k + s_m$. Somit ist nach Gl. 40 und 71 b die relativ grösste erreichbare Zuflussstärke:

73) . Maximum $Q = c\sqrt{h_k - h} = c\sqrt{h_k - (H_i)_k + s}$.

Die Anwendung der gegebenen Formeln möge das folgende Beispiel zeigen:

Beispiel: Die Spannung im Luftkessel der Luftdruckpumpe kann 7 Atm. nicht übersteigen. Der höchste Wasserspiegel im artesischen Brunnen liegt 17 m tief vom Ausflussniveau gemessen und in einem 42 m tiefen Niveau ist die Zuflussstärke des Brunnens 6,95 m^3: stündlich. — Wie gross kann höchstens die Wassermenge werden, welche man in der Stunde bei einer minimalen Ausgusshöhe von 1 m ununterbrochen heben kann?

Wie tief muss das Luftrohr in den Brunnen behufs Erreichung der grössten Ausnutzung der Anlage getaucht werden und wie weites Steigrohr soll deshalb angewendet werden?

Zuförderst ist die charakteristische Ergiebigkeit des Brunnens zu ermitteln. Nachdem $s_1 = 42$, $s_m = 17$, $Q_1 = \frac{6,95}{60^2}$ sind, folgt nach Gl. 71 c:

$$c = \frac{Q_1}{\sqrt{s_1 - s_m}} = \frac{6,95}{60^2 \sqrt{42-17}} = 0,0003862 \text{ m}^3: \text{Sek.}$$

Diese Zahl gibt an wie viel Wasser zufliessen kann, wenn der höchste Wasserstand im Brunnen um ein Meter tiefer abgesenkt ist.

Nachdem die zulässige Spannung der verdichteten Luft 7 Atm. ist und diese gleichwertig mit dem Druck einer $h_k = 70$ m hohen Wassersäule ist, so folgt, dass das Luftrohr nach Gl. 72 vom Ausflussniveau gemessen $(H_i)_k = h_k + s_m = 70 + 17 = 87$ m tief eingetaucht werden muss, damit die Ergiebigkeit des Brunnens und die Leistungsfähigkeit der Luftpumpe möglichst voll ausgenützt werden könne.

Dann wird in Gl. 65 c $\frac{\mu H_i}{D-d} = \frac{0,0105 \times 87}{0,104 - 0,042} = 14,73$. Ferner ist $2 g h_i = 2 \times 9,81 \times 1 = 19,62$. Und weil $H_s = (H_i)_k + h_i = 87 + 1 = 88$ m, so ist nach Tabelle I (Seite 35) die erreichbare Steighöhe bei 20 m Wasserstand etwa 75 m und bei 30 m Wasserstand etwa 122 m. Zwischen diese Werte fällt die gefundene Steighöhe 88 m, für welche nach linearer Interpolation für je 1 m Steighöhe um $\frac{30-20}{122-75} = 0,212$ m grösserer Wasserstand erforderlich ist. Somit wird der erforderliche Wasserstand sein:

$$h_s = 0,212 \times 88 = 18,66 \text{ m}.$$

Dem entspricht aber bei diesem Brunnen nach Gl. 40 die Zuflussstärke:

$$Q_s = c\sqrt{h_k - h_s} = 3,86 \times 10^{-4} \sqrt{70 - 18,66} = 0,002765 \text{ m}^3: \text{Sek.} = 9,95 \text{ m}^3: \text{stündlich.}$$

Nun ist nach Gl. 65 c indem $h_s = 18,66$ m ist:

$$A \cong \left(\frac{1}{\lambda}\frac{p'_1}{p} + 1\right)^2 - \left(\frac{1}{\lambda} + 1\right)^2 = \left(\frac{10}{6}\frac{h_s + 10}{10} + 1\right)^2 - \left(\frac{16}{6}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{10}{6} \times 2,866 + 1\right)^2 - 7,1 = 5,776^2 - 7,1 = 26,26.$$

Wenn wir nun ein Luftrohr vorrätig haben, dessen äusserer Durchmesser $d = 0,042$ m ist, so müsste ein Steigrohr, durch dessen Innern das Luftrohr hinabgeleitet werden soll, nach Gl. 66 a die Weite haben indem wir $h_i = 1$ annehmen:

$$D = \sqrt{d^2 + \frac{4}{\pi} Q_s \sqrt{\frac{A}{2 g h_i}\left(1 + \frac{\mu H_i}{D-d}\right)}} =$$

$$\sqrt{(0,042)^2 + \frac{4 \times 2,765}{3,14 \times 10^3}\sqrt{\frac{26,26}{19,62}\left(1 + 0,0105\frac{87}{D - 0,042}\right)}}.$$

Nehmen wir vorläufig $D \doteq 0,080$ an, so ergibt sich die Formel:

$$D \doteq \sqrt{0,001763 + 0,00352\sqrt{1,338\,(1 + 12,33)}} \doteq 0,0804,$$ welcher genügend genau mit dem früher angenommenen und eingesetzten Wert stimmt.

Nun ist dieser Brunnen mit einem $D = 0,100$ m weitem Steigrohr, in welchem das $d = 0,042$ m weite Luftrohr abgeleitet ist, wirklich im Betriebe und man kann damit wohl sehr stark intermittierend nur 6,9 m³: stündlich Wasser heben. Die Theorie zeigt, dass das angewandte Steigrohr zu weit im Verhältnis zur Ergiebigkeit des Brunnens und zur bedeutenden Förderhöhe ist.

Nimmt man die Ausgusshöhe h_i allzu klein an, so gibt die Formel ein sehr weites Steigrohr. Die Luft muss wohl dann auf einen geringern Druck verdichtet werden, aber man läuft Gefahr, dass dann der Betrieb intermittierend wird. Nimmt man hingegen die Ausgusshöhe allzu gross an, so gibt die Formel ein zu enges Steigrohr. Die Luft muss dann auf höhern Druck verdichtet werden und der Wirkungsgrad wird eben deshalb geringer.

XIV. Druckverlust im Luftrohr und Beurteilung des Brunnenwasserstandes vom Druck im Luftkessel.

Bei Bestimmung der zu verdichtenden Luftmenge und der Berechnung der Rohrdimensionen haben wir statt dem Repulsivdruck der Luft am Luftrohrmündungsniveau den Druck des Wasserstandes über dasselbe in Rechnung gestellt, was umso annäherungsweise richtigere Resultate liefert, je weniger Luft man durch ein je weiteres Luftrohr ins Wasser blasen lässt, und je weniger die Temperatur der verdichteten Luft von der Temperatur des Brunnenwassers verschieden ist. Auch ist es nötig, vom allfälligen im Luftkessel herrschenden Druck der Luft auf den Repulsivdruck derselben am Mündungsniveau des Luftrohres und dann auf den entsprechenden Wasserstand im Brunnenbohrloch, welcher nicht auf andere Weise beobachtet werden kann, zu folgern. Der Luftdruck p_r im Luftkessel lässt sich direkt beobachten; der Repulsivdruck der Luft p_1 am Mündungsniveau des Luftrohres kann aber nur beurteilt werden.

Grashof[1]) folgerte mittels der Wärmetheorie, der Dimensionen und Lage der Rohre auf den Druckverlust in Rohrleitungen, so auch wurden empirische Formeln auf den Druckverlust durch Reibung in langen Rohrleitungen für Luft im Mont Cenis-Tunnel und in Paris gemacht und veröffentlicht[2]). Nachdem aber beim Leitungsrohr des Druckluftwasserhebers ausser dem Anfangsdruck und der Temperatur der Luft auch die Endtemperatur desselben, weil eine vollkommene Wärmeausgleichung angenommen werden kann, als Bekannte betrachtet werden können, so können wir hier einen von der Länge, Lage und Weite des Rohres unabhängigen Weg einschlagen. Denn die Reibung der Luft an der Wandung des Rohres vermehrt den Repulsivdruck, die Temperatur, das Volumen und die Geschwindigkeit der Luft, wenn die Wand die Wärme nicht vollständig abzuleiten vermag. Wenn hingegen mehr Wärme abgeleitet wird, als durch die Reibung entsteht, so sinkt der Repulsivdruck, das Volumen, die Temperatur und Geschwindigkeit der Luft. Es können aber unendlich verschiedene Fälle geben, nach welchem Gesetze durch die Rohrwandteile die Wärme der durchziehenden Luft abgeleitet werden kann. Wir setzen jedoch im gegebenen Falle voraus, dass die mit der absoluten Temperatur T_r vom Luftkessel kommende Luft, infolge ihrer geringen Wärmekapazität gegen die des Wassers, schleunigst bis zur absoluten Temperatur T_1 des Brunnenwassers sich abkühlt und sie diese Temperatur während des Durchströmens durch den in das Wasser tauchenden Teil des Rohres unverändert behält. Aber währenddem wird auch ein Teil ihrer durch Reibung veränderten kinetischen Energie in Form von Wärme abgeleitet, und dieser Verlust ist mit dem beobachteten oder gegebenen Temperaturabfall direkt proportional veränderlich. Weil nun 1 kg atmosphärische Luft unter konstantem Druck 0,237 Kalorien Wärme braucht, um auf 1 Grad höhere Temperatur erwärmt zu werden, und weil der Arbeitsäquivalent der Wärmeeinheit 424 mkg ist, so wird der Energieverlust im Luftrohr, während die Geschwindigkeit u_r und Temperatur T_r der Luft am Anlassventil des Luftkessels

[1]) Theor. Maschinenlehre, 1. Bd., § 104 bis 109.

[2]) Siehe G. Hiscox: Compressed air. London 1902, Seite 721.

auf die Geschwindigkeit u_1 und Temperatur T_1 in einem Rohr durch kräftige Abkühlung sinken würden (wenn auch inzwischen durch Reibung sich die Luft erwärmte):

$$\frac{u_r^2 - u_1^2}{2\,g} = 0{,}237 \times 424\,(T_r - T_1).$$

Nun aber ist nach Gl 43c das bei der Luftrohrmündung erreichte Geschwindigkeits-Potenzial, wenn p_1' den Druck des Wasserstandes und p_1 den Repulsivdruck der Luft am Mündungsniveau bedeuten:

$$\frac{u_1^2}{2\,g} = \frac{\varphi^2}{2}\,R\,T\left(1 - \frac{p_1'}{p_1}\right).$$

Wenn hingegen die Luft direkt ohne Widerstand bietende Rohrverbindung vom Luftkessel so ins Brunnenwasser kommen könnte, dass ein Energieverlust ausgeschlossen wäre, so würde, indem p_r den spez. Luftdruck im Rezipienten bedeutet, ihr Geschwindigkeits-Potential sein:

$$\frac{u_r^2}{2\,g} = \frac{R\,T_r}{2}\left(1 - \frac{p'_1}{p_r}\right).$$

Aus obigen drei Gleichungen folgt, wenn wir die Koeffizientengruppe, indem $R = 29{,}38$ mkg ist, so einfach bezeichnen:

$$n = \frac{0{,}237 \times 424}{29{,}38} = 3{,}4$$

74a) . . $2\,n\,(T_r - T_1) = T_r\left(1 - \frac{p'_1}{p_r}\right) - \varphi^2\,T_1\left(1 - \frac{p'_1}{p_1}\right)$, worin der von den Rohrdimensionen abhängige Koeffizient nach Gl. 44

74b) . . . . $\varphi^2 = \dfrac{2}{\dfrac{2}{\alpha^2} - \left(\dfrac{d_1}{d}\right)^4}$ bedeutet.

d ist der innere Durchmesser der Rohrweite, d_1 der Durchmesser der Mündungsweite desselben.

Multiplizieren wir alle Glieder der Gl. 74a mit $\frac{2}{T_r}$ und entwickeln wir den Wert des Druckes im Luftkessel, so folgt, dass derselbe ist:

75) . . . . $p_r = \dfrac{p'_1}{1 - \varphi^2\,\dfrac{T_1}{T_r}\left(1 - \dfrac{p'_1}{p_1}\right) - 2\,n\left(1 - \dfrac{T_1}{T_r}\right)}$, in welchem der spez. Druck des Wasserstandes nach Gl. 46c

$$p'_1 = (h_s + 10)\,\varrho$$

und der Repulsivdruck an der Luftrohrmündung nach Gl. 42b

$$p_1 = \frac{\lambda\,V_0\,p_0}{Q}\,\frac{T_1}{T_0}.$$

Auch ist nach Gl. 46a

$$\frac{p'_1}{p_1} = 1 - \frac{\sigma^2\,Q_1^2}{f_1^2}.$$

Die Formel 75 dient dazu, damit man bei neuen Brunnen, wenn dessen charakteristische Ergiebigkeitszahl durch Probepumpen bestimmt wurde, und wenn die von der Luftdruckpumpe zu erwartende Stromstärke verdichteter Luft gegeben sind, man auf den im Luftrezipienten entstehenden Druck bei normalem Wasserstande durch Rechnung folgern könne. Der Wasserstand und die erforderliche Wassermenge sind nach Gl. 40 von einander abhängige Grössen. Es genügt also, wenn nur eine Zahl von beiden gegeben ist.

Eine andere Aufgabe ist die, bei Beobachtung der Wirkungsweise vorhandener Anlagen aus dem Druck im Luftkessel auf die Höhe des Wasserstandes über das Luftrohrmündungsniveau zu folgern. Denn der Brunnenwasserstand kann bei artesischen Brunnen gewöhnlich während des Betriebes direkt nicht gemessen werden, weil dazu der Raum zwischen dem Brunnenrohr und Steigrohr sehr enge ist. Aber die Kenntnis des Wasserstandes ist nötig, wenn man nach Gl. 40 auf die Zuflussstärke des Brunnens bei andern Wasserständen Folgerungen ziehen will. Nachdem wir nämlich versuchsweise die beharrlich hebbare Wassermenge Q m^3: Sek., die Luftstromstärke V_0 m^3: Sek. atmosphärischer Pressung, welche durch die Luftpumpe verdichtet wurde und den abs. Druck p_r im Luftkessel, sowie auch die Temperaturen der äussern und verdichteten Luft und des Brunnenwassers durch Beobachtung bestimmt haben, können wir nach 42b auf die Grösse des Repulsivdruckes p_1 folgern, welchen die Luft bei der Einmündung ins Brunnenwasser haben kann. Somit folgt dann aus Gl. 74a, dass der spez. Druck des Wasserstandes und der Atmosphäre auf die Luftrohrmündung

$$76) \quad \ldots\ldots \quad p'_1 = p_r \frac{(2n-1)\frac{T_r}{T_1} - 2n + \varphi^2}{\varphi^2 \frac{p_r}{p_1} - \frac{T_r}{T_1}}, \text{ worin } 2n - 1 = 5{,}926$$

$$p_1 = \frac{\lambda V_0 p_0}{Q} \frac{T_1}{T_0} \text{ und } \varphi^2 = \frac{2}{2 - \left(\frac{d_1}{d}\right)^4}.$$ Somit ist schliesslich

die Höhe des Wasserstandes $h_s = \frac{p'_1}{\varrho} - 10$.

Beispiel: Beim neugebohrten Brunnen in S. wurden behufs Bestimmung der Weite des definitiv anzuwendenden Steigrohres Versuche mittels einer provisorischen Anlage gemacht. Durchschnittlich wurde stündlich 150 m^3 verdichtete Luft eingeblasen. Anfangs zeigte das Manometer am Luftkessel 7 Atm. Spannung, woraus folgt, dass der anfängliche Wasserstand h_m über die Luftrohrmündung 70 m hoch war. Der Überdruck im Luftkessel fiel aber allmählich bis auf 5,1 Atm. hinunter, demnach dann der Repulsivdruck der Luft $\frac{p_r}{p_0} = 5{,}1 + 1 = 6{,}1$ Atm. war. Unter diesem konstant gebliebenen Druck konnten 18,5 m^3 Wasser stündlich gehoben werden. Die äussere Lufttemperatur von der Luftpumpe betrug 12° C., die des Brunnenwassers 21° C. und die im Luftkessel 35° C. Ferner war das Verhältnis zwischen den Durchmessern der Rohrweite und der Mündungsweite desselben $\frac{d}{d_1} = 1$, Länge des Luftrohres war $l = 80$ m. $d = 0{,}025$ mm.

1. Frage: Wie gross war der abgesenkte Wasserstand im Brunnen?

Nach Gl. 42b war der Repulsivdruck der Luft am Mündungsniveau des Luftrohres

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{\lambda V_0}{Q} \frac{T_1}{T_0} = 0{,}6 \frac{150}{18{,}5} \frac{273+21}{273+12} = 5{,}02 \text{ Atm.}$$

Dies in Gl. 76 eingesetzt, gibt folgenden Gegendruck auf die Luftrohrmündung in Wassersäule ausgedrückt, nämlich:

$$\frac{p'_1}{\varrho} = h_s + 10 = \frac{p_r}{\varrho} \frac{(2n-1)\frac{T_r}{T_1} - 2n + \varphi^2}{\varphi^2 \frac{p_r}{p_1} - \frac{T_r}{T_1}},$$ in welcher Formel

$$\varphi^2 = \frac{2}{2 - \left(\frac{d_1}{d}\right)^4} = 2, \quad \text{und } (2n - \varphi^2) = 4{,}926 \text{ ferner } \frac{p_r}{p_1} = \frac{6{,}1}{5{,}02} = 1{,}215$$

$$\frac{T_r}{T_1} = \frac{273+35}{273+27} = \frac{308}{245_1} = 1{,}0465$$ sind. Somit war der

Wasserstand

$$h_s = 61{,}2 \frac{5{,}926 \times 1{,}047 - 4{,}926}{2 \times 1{,}215 - 1{,}047} - 10 = 61{,}2 \frac{1{,}004}{1{,}383} - 10 = 44{,}4 - 10 = 34{,}4 \text{ Meter.}$$

2. Frage: Wie gross würde die Spannung im Luftkessel bei diesen Brunnen werden, wenn der Wasserstand $h_s = 34{,}4$ m, $\frac{d_1}{d} = 1$, $\frac{p_1}{10\,\varrho} = 5{,}02$ Atm. und die Luft im Luftkessel bis auf die Temperatur des Brunnenwassers abgekühlt würde?

Nachdem dann $T_r = T_1$ folgt aus Gl. 75

$$p_r = \frac{p'_1}{1 - \varphi^2 \left(1 - \frac{p'_1}{p_1}\right)} \text{ worin}$$

$$p'_1 = (h_s + 10)\,\varrho = (34{,}4 + 10)\,10^3 = 44400$$

$\varphi^2 = 2$ und $\frac{p'_1}{p_1} = \frac{4{,}44}{5{,}02} = 0{,}885$, demnach ist der resultierende Druck im Luftkessel

$$\frac{p_r}{10\,\varrho} = \frac{4{,}44}{1 - 2\,(1 - 0{,}885)} = 5{,}766 \text{ Atm.}$$

und daher die Spannung $5{,}766 - 1 = 4{,}766$ Atm. Also braucht die Luftpumpe die Luft um $5{,}1 - 4{,}766 = 0{,}334$ Atm. niedrigeren Druck zu verdichten als in früherem Fall.

XV. Erforderliche Versuchsdaten und Versuchsresultate.

Bei Anstellung von Versuchen soll die Beobachtung sich auf Messung der folgenden Grössen erstrecken. Und zwar an folgenden Objekten:

I. Röhren.

1. Länge des Steigrohres vom Ausflussniveau gemessen.
2. Innerer Durchmesser des Steigrohres.
3. Eintauchtiefe des Luftrohres vom Ausflussniveau gemessen.
4. Innerer Durchmesser des Luftrohres.
5. Äusserer Durchmesser des Luftrohres.
6. Innerer Durchmesser der Luftrohrmündung.
7. Innerer Durchmesser des Brunnenrohres.
8. Bohrlochtiefe.

II. Brunnenwasser.

1. Tiefe des höchsten Wasserstandes vom Ausflussniveau.
2. Tiefe eines beobachteten abgesenkten Wasserstandes vom Ausflussniveau.
3. Zuflussstärke bei letzterem Wasserstande.
4. Temperatur des Brunnenwassers.

III. Druckluftpumpe.

1. Durchmesser des Luftkolbens.
2. Hublänge „ „
3. Anzahl der einfachen Hube aller Kolben in der Zeiteinheit.
4. Volumetrischer Wirkungsgrad.
5. Lufttemperatur vor dem Verdichten.
6. Höchst zulässiger Druck der verdichteten Luft.

IV. Luftkessel.

1. Luftspannung bei Beginn des Betriebes und Änderungen derselben während des Betriebes.
2. Lufttemperatur im Luftkessel.

V. Gehobenes Wasser.

1. Intermittenzdauer der Pausen.
2. „ des Ausflusses (Anschwellen desselben)
3. Menge des gehobenen Wassers in Zeiteinheiten.

Leider fehlen bei veröffentlichten Versuchen besonders die auf die Brunnenergiebigkeit bezüglichen Daten und die präzise Angabe des allfälligen Wasserstandes. Bei den Versuchen von Prof. Josse[1]) sind wohl die anfänglichen Wasserstände durch die effektiven Eintauchtiefen des Luftrohres vor Beginn des Versuches gegeben, jedoch sind keine Angaben vorhanden, wie tief während des Betriebes die Wasserstände hinabgesenkt worden sind. Auch können nicht einmal näherungsweise Schlussfolgerungen auf die abgesenkten Wasserstände gemacht werden, weil die Luftdrucke im Luftkessel nicht angegeben sind.

Noch früher hat Prof. Randal in San Francisco in Gemeinschaft mit H. Brown und Behr Versuche angestellt, um das System von Dr. Pohlé zu erproben, bei welchen sie den Wasserstand während des einzelnen Versuches konstant hielten, weil das gehobene Wasser über ein Wehr, welches zur Beurteilung der gehobenen Wassermenge diente, wieder in den Brunnen zurückfloss. Auch die Spannungen im Luftkessel wurden angegeben. In beigefügter Tabelle sind die aus dem Engineering News (Jahrg. 1893, 8. Juny) entnommenen, in englischen Mafsen angegebenen Versuchsergebnisse in metrische Mafse umgerechnet wiedergegeben.

Die zwei letzten senkrechten Rubriken hat Verfasser noch hinzugefügt, um zu zeigen, wie der durch Rechnung gefundene Repulsivdruck der Luft an der Luftrohreinmündung sich von dem Druck im Luftkessel unterscheidet, und wie man aus den Versuchsdaten rückwärts auf das Verhältnis folgern kann, nach welchem eine bestimmte Wassermenge durch die Raumeinheit Druckluft beschleunigt werden konnte. Dass letztere Verhältniszahl von der durch Du Buat gefundenen $\lambda = 0{,}45$ bis 0,63 bei manchen Versuchen durch Rückrechnung höher, bei anderen niedriger resultiert, kann dem Umstand zugeschrieben werden, dass die zur Grundlage der Umrechnung dienenden Grössen, und zwar am wahrscheinlichsten die in der Zeiteinheit gehobenen Wassermengen auf Grund der durch das Wehr gebildeten Stauhöhe des zurückfliessenden Wassers nicht immer genügend genau bestimmt werden konnten. Die Luftstromstärke wurde nicht durch Rechnung aus dem Rauminhalt des Zylinders der Luftpumpe und der Hubanzahl des Kolbens beurteilt, sondern sie schalteten einen kleinen mit Quecksilber-Druckmesser verbundenen Luftbehälter zwischen Luftkessel und Luftpumpe. Somit konnte die gelieferte Druckluftmenge auf zweierlei Weise bestimmt werden, indem sie zeitweise das Verbindungsrohr zwischen dem Luftkessel und dem Luftbehälter sperrten und beobachteten, in wieviel Zeit der Druck im Luftbehälter während des gleichförmigen Ganges der Luftpumpe auf einen bestimmten höheren Druck steigt.

---

[1]) Zeitschr. d. Ver. deutscher Ing., Jahrg. 1898, Nr. 36. — Einige Versuchsresultate und Beschreibungen enthalten auch: G. Hiscox, Compressed air. London 1900. — Hartmann u. Knocke, Die Pumpen. Berlin 1901.

Versuchsergebnisse

der im Jahre 1890 mit Druckluftwasserheber „System Pohlé“ in San Francisco gemachten Versuche.

Versuch	Förderhöhe $H_i - h_s$	Wasserstand h_s	Druck der Wasserstandsäule $h_{s,io} = (p_i' - p_o) : p_o$	Atmosphären-Überdruck im Luftkessel $(p_r - p_o) : p_o$	Verbrauchte Luftmenge atmosphärischer Pressung $60\ V_o$	Gehobene Wassermenge $60\ Q_s$	Der Isothermal-Compression entsprechende Leistung L_d	Nutzleistung behufs Heben des Wassers L_n	Verhältnis $\frac{H_i - h_s}{h_s}$	Wirkungsgrad $100\ L_n : L_d$	Absoluter Druck der Luft beim Einströmen ins Wasser $p_1 : p_o$	Verhältnis $\lambda = \frac{Q_1}{V_1} = \frac{Q_s\ p_1}{V_o\ p_o}$
Nr.	m	m	kg : cm²	kg : cm²	m³ : min	m³ : min	kg × m : Sek.	kg × m : Sek.		%	kg : cm²	
1	4.66	11,06	1.106	1,662	1,934	0,6014	291,0	46,7	0,4	16	2,231	0,69
2	4.66	11.06	1,106	1,243	1,014	0,5406	100,8	42,0	0,4	33	2,139	1,12
3	4.66	11.06	1,106	1,165	0.662	0,4345	79.1	33,7	0,4	43	2,119	1,11
4	10,70	16,21	1,621	2.200	1,837	0,5330	340,0	94,9	0,6	28	2,712	0,79
5	10.72	16,19	1,619	1,928	1,437	0,5120	308,0	91,6	0,6	37	2,674	0,95
6	10,66	16,24	1,624	1,792	0,966	0,4120	159,0	73,2	0,6	46	2,649	1,13
7	10,66	16,24	1.624	1,726	0,707	0.3298	110,8	58,6	0,6	53	2.637	1,23
8	6,19	9,54	0,954	1,575	1,932	0,5020	283,4	51,7	0,7	18	2.083	0,54
9	6,19	9,54	0,954	1,086	0,943	0,5130	106,2	42,0	0,7	39	1,986	1,08
10	6,19	9,54	0,954	1,036	0.754	0,3626	82,1	36,5	0,7	44	1,987	0,69
11	8,02	7,71	0.771	1,460	1,965	0.3901	278,0	52,1	1.0	19	1.925	0,40
12	8,02	7,71	0,771	1,137	1,390	0,3555	162,7	46,4	1,0	29	1.848	0,47
13	8,02	7,71	0,771	0.899	0.778	0,2412	77.1	32,2	1.0	42	1,795	0,58
14	22,92	16,15	1,615	2,237	1,806	0,2982	332,7	113,8	1,4	34	2,704	0,44
15	22,98	16,09	1,609	2.215	1,838	0,3056	338,6	116,9	1,4	34	2,700	0,46
16	22,95	16,13	1,613	1,986	1.390	0.2698	241,1	96,7	1,4	41	2,665	0,52
17	22,95	16,13	1,613	1,827	0,259	0,1288	159,7	49,2	1,4	31	2,614	1,32
18	16,68	10,24	1,024	1,712	1,909	0,2613	297,1	72,6	1,6	24	2,080	0,71
19	16,68	10,24	1,024	1,252	1,155	0,1400	145,5	38,8	1,6	27	2,040	0,25
20	16,61	10.30	1,030	1,158	0.778	0,0979	94,1	27,1	1,6	29	2,037	0.26
21	9,60	6,13	0,613	1,360	1,980	0,2698	265,5	40,3	1,6	15	1.660	0,13
22	9,60	6,13	0,613	0,885	1,226	0,1913	118,8	30,5	1,6	26	1,637	0.25
23	9,54	6,19	0,619	0.719	0,730	0,1075	59,7	17,1	1.6	29	1,641	0,25
24	10,97	4,76	0,476	1,230	2,027	0.0158	251,1	21,5	2,3	9	1,672	0,13
25	10,97	4,76	0,476	0,726	1,225	0,0720	103,5	13,1	2,3	13	1,548	0,91
26	10,97	4,76	0,476	0,533	0,683	0,0158	44,6	2,9	2,3	7	1,500	0,35
27	18,93	7,99	0,799	1,482	1,956	0,1582	281,9	49,9	2,4	18	1,949	0,16
28	19,02	7,89	0,789	1.093	1,320	0,1075	150,3	35,6	2,4	24	1,858	0,15
29	19,02	7,89	0,789	0,885	0,683	0,0314	67,5	10,0	2,4	15	1,807	0,08
30	21,30	5,61	0,561	1,353	1,980	0,0574	263,0	23,0	3.8	8	1,739	0,05
31	21,21	5,70	0,570	0,856	1,179	0,0114	115.6	4,0	3,8	3	1,631	0,02
32	12,50	3.23	0,323	1.137	2,050	0,0248	242,8	5,1	3.9	2	1,548	0,09
33	12,50	3,23	0,323	0,511	0,825	—	52,9	—	3,9	—	1,359	—

Den ähnlichen Versuch machten sie nach kurzer Zeit auch mittels des Luftkessels, indem sie den Weg der Luft zum Luftrohr versperrten. Ist W_x der Rauminhalt des Luftbehälters mit dem des Verbindungsrohres und steigt der Druck in ϑ Sekunden von p_1 auf p_2 in demselben, ferner die Temperatur der Druckluft, welche durch eingesetztes Thermometer beobachtet wurde, von T_1 auf T_2, so ist offenbar das Gewicht G der in der Sekunde verdichteten Luft:

$$G = \frac{W_x}{R\vartheta}\left(\frac{p_2}{T_2} - \frac{p_1}{T_1}\right).$$ Und dann ist die Luftstromstärke atmosphärischer Pressung:

$$V_0 = \frac{G R T_0}{p_0} = \frac{29{,}38}{10^4} G T_0 \text{ m}^3\text{: Sek.}$$

Bei einfachen Versuchen an vorhandenen Anlagen genügt es, die verdichtete Luftmenge aus der Dimensionierung des Zylinders der Luftpumpe und der Tourenzahl zu berechnen. Ist D_k der Kolbendurchmesser der Luftpumpe in m, s_k der Kolbenweg in m, n die Anzahl der Doppelhube in der Minute, ψ der volumetrische Wirkungsgrad (0,92 ÷ 0,96) der Druckluftpumpe, so ist die in der Sekunde verdichtete Luftmenge atm. Pressung:

$$V_0 = \psi D_k^2 \frac{\pi}{4} \frac{n}{30} s_k \text{ m}^3\text{: Sek.}$$

Das Steigrohr des zu den Versuchen dienenden Wasserhebers hatte 3 englische Zoll, das Luftrohr 0,9 Zoll innern Durchmesser und war letzteres nach Pohlés System (Abb. 7) neben dem Steigrohr ins Wasser geführt. Der Durchmesser der Luftrohrmündung war $^5/_8$ Zoll. Die Länge des Luftrohres war 35 Fuss = 10,5 m über dem allfälligen eingetauchten Teil desselben. Das Wasser wurde von einem 53 Fuss = 16 m tiefen geschlossenen Brunnenrohr, dessen Durchmesser 10 Zoll = 254 mm war, gehoben. Die Lufttemperatur im Luftkessel betrug während den Versuchen 73° bis 78° F. = 23° bis 26° C., die der Aussenluft 68° bis 76° F. = 20° bis 23° C. und die des Wassers 67° bis 70° F. = 19° bis 21° C.

Betrachtet man die Tabelle, so ist ersichtlich, dass der Wirkungsgrad des Nutzeffektes um so grösser ausfiel, je minder der Überdruck im Luftkessel den Druck des Wasserstandes auf das Mündungsniveau überragte und je kleiner das Verhältnis der effektiven Förderhöhe zum allfälligen Wasserstande war. Es ist ersichtlich, dass im allgemeinen bei besseren Druckverhältnissen der Luft im Rezipienten der Wasserheber mit dem Wirkungsgrad von etwa 50% arbeiten konnte, als das Verhältnis der Förderhöhe zum Wasserstand beiläufig $^1/_2$ war. So ergab sich der Wirkungsgrad 40% für Verhältnis $\frac{H_i - h_s}{h_s} = 1{,}0$; hingegen der Wirkungsgrad nur 25% betrug, wenn $\frac{H_i - h_s}{h_s} = 2$ war.

Ferner wird ersichtlich, dass das Luftrohr ohne Reduktion des Druckes die Luft nicht ins Wasser zu leiten vermag und diese Reduktion einen höhern Druck im Luftkessel bedingt, als der Repulsivdruck am Mündungsniveau des Luftrohres beträgt. Letzterer wieder wird um so grösser, je grösser die Luftstromstärke ist.

Der Wirkungsgrad war bei unveränderter Förderhöhe und gleichem Wasserstande um so grösser, je geringere Luftstromstärke angewendet wurde, weil auch der Druck p_1 am Mündungsniveau des Luftrohres sich verminderte, wie dies übereinstimmend auch aus Gl. 70 gefolgert werden kann.



